吴诗非 2020010389

10.

$$E\left(e^{-\frac{\lambda(X_\alpha-\alpha)}{\sqrt{\alpha}}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{\lambda(k-\alpha)}{\sqrt{\alpha}}}\cdot\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$$

$$=e^{\lambda\sqrt{\alpha}-\alpha}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}})^k}{k!}$$

$$=e^{\lambda\sqrt{\alpha}-\alpha}\cdot e^{\alpha e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}}}$$

$$=e^{\alpha e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}}-\alpha+\lambda\sqrt{\alpha}}$$

~~根据泰勒展开:~~ $\cancel{e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}}=1-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\lambda^2}{\alpha}+\theta(\alpha)}$, $\cancel{\lim_{\alpha\to\infty}\theta(\alpha)=0}$

$\cancel{LHS=e^{\alpha(1-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\lambda^2}{\alpha})}}$

当$\alpha\to\infty$时，$\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}\to 0$，$\alpha e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}}-\alpha+\lambda\sqrt{\alpha}\to\alpha(1-\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\lambda^2}{2\alpha})-\alpha+\lambda\sqrt{\alpha}=e^{\frac{\lambda^2}{2}}$

故 $\lim_{\alpha\to\infty}E\left(e^{-\frac{\lambda(X_\alpha-\alpha)}{\sqrt{\alpha}}}\right)=e^{\frac{\lambda^2}{2}}$

对$\forall\lambda$上式都成立，根据定理9可知 $\alpha\to\infty$时 $\frac{X_\alpha-\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ 的分布函数是 $\Phi(u)$

12.

设X表示n秒内经过的车数

每秒经过车数期望 $\alpha=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$

根据 7.2.11，X的密度函数 $f_n(u)=\frac{(\frac{1}{2})^n}{(n-1)!}\cdot u^{n-1}\cdot e^{-\frac{u}{2}}$

故 $P(X\geq N)=\int_N^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!\,2^n}\cdot u^{n-1}e^{-\frac{u}{2}}du$

13. 设100次的点数和 $S_{100}=\sum_{n=1}^{100}X_n$，$X_n$是每次的点数，$E(X_n)=3.5$，$\sigma^2(X_n)=\frac{35}{12}$

则 $E(S_{100})=100E(X_n)=350$，$\sigma^2(S_{100})=100\sigma^2(X_n)=\frac{875}{3}$

记 $S_{100}^*=\frac{S_{100}-350}{\sqrt{\frac{875}{3}}}$，$330\leq S_{100}\leq 380\Rightarrow S_{100}^*\in\left[\frac{-20}{\sqrt{\frac{875}{3}}},\frac{30}{\sqrt{\frac{875}{3}}}\right]$

根据中心极限定理:

$$P\left(\frac{-20}{\sqrt{875/3}}\leq S_n^*\leq\frac{30}{\sqrt{875/3}}\right)=\int_{\frac{-20}{\sqrt{875/3}}}^{\frac{30}{\sqrt{875/3}}}\varphi(u)du=\Phi(3\sqrt{\tfrac{12}{35}})-\Phi(-2\sqrt{\tfrac{12}{35}})$$

15. 设 X_n 表示第 n 个顾客是否能来第一个影院, $X_n=1$ 代表来 $n=1,\cdots,1000$

S_{1000} 代表来第一个影院的顾客总数, 则 $S_{1000}=\sum\limits_{n=1}^{1000}X_n$

~~由题~~ $X_n\sim B(1,\frac{1}{2})$, $E(X_n)=\frac{1}{2}$, $\sigma^2(X_n)=\frac{1}{4}$

故 $E(S_{1000})=1000E(X_n)=500$. $\sigma^2(S_{1000})=1000\sigma^2(X_n)=250$

记 $S^*=\dfrac{S_{1000}-500}{\sqrt{250}}$

设有 N 个座位使得顾客有低于 1% 的概率坐不下

则 $P(S_{1000}>N)\le 1\%\ \Rightarrow\ P(S^*>\frac{N-500}{\sqrt{250}})\le 1\%$.

1000个人很多 ~~根据中心极限定理,~~ $\cancel{P(S^*\le\frac{N-500}{\sqrt{250}})=\phi(\frac{N-500}{\sqrt{250}})\le 0.99}$

根据中心极限定理, $P(S^*>\frac{N-500}{\sqrt{250}})=1-\phi(\frac{N-500}{\sqrt{250}})\le 0.01$

$\phi(\frac{N-500}{\sqrt{250}})\ge 0.99$, 查表得 $N\ge 500+2.33\sqrt{250}\approx 536.8$

故 $N\ge 537$ 时才能保证顾客有低于 1% 坐不下

16. 设至少要抽 N 个人, 记第 i 个人是否支持为 X_i $(i=1,\cdots,N)$

$S_N=\sum\limits_{i=1}^{N}X_i$, 且 $X_i\sim B(1,p)$, $E(X_i)=p$, $\sigma^2(X_i)=p(1-p)$

$E(S_N)=Np$, $\sigma^2(S_N)=Np(1-p)$

设 $S_N^*=\dfrac{S_N-Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$,

为使 $P(|\frac{S_N}{N}-p|\le 4.5\%)\ge 95\%$, 代入 $S_N-Np=S_N^*\cdot\sqrt{Np(1-p)}$

让 $P(|S_N^*|\le 4.5\%\sqrt{\frac{N}{p(1-p)}})\ge 95\%$ 即可

根据中心极限定理, $P(|S_N^*|\le 4.5\%\sqrt{\frac{N}{p(1-p)}})=\phi(4.5\%\sqrt{\frac{N}{p(1-p)}})-\phi(-4.5\%\sqrt{\frac{N}{p(1-p)}})$

$=2\phi(4.5\%\sqrt{\frac{N}{p(1-p)}})-1$

对 $\forall p\in(0,1)$ 有 $\sqrt{\frac{N}{p(1-p)}}\ge 2\sqrt{N}$, 因此只需 $2\phi(9\%\sqrt{N})-1\ge 95\%$ 即可

$\phi(\frac{9\sqrt{N}}{100})\ge 97.5\%$ $\quad\frac{9\sqrt{N}}{100}\ge 1.96$

解得 $N\ge 475$

最少需要 475 个人才能有 95% 以上的把握估算出误差小于 4.5% 的 p

17. 构造 $f(x)=\Phi(x+2)-\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x+2}\varphi(t)dt-\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$

则 $f'(x)=\varphi(x+2)-\varphi(x)=e^{-\frac{(x+2)^2}{2}}-e^{-\frac{x^2}{2}}$

当 $x\ge0$ 时，$\varphi(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 是减函数

故 $\varphi(x+2)-\varphi(x)<0 \quad (x\ge0)$

$\therefore f'(x)<0 \quad (x\ge0)$

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减

故 $f(0)>f(1) \Rightarrow \Phi(2)-\Phi(0)>\Phi(3)-\Phi(1) \Rightarrow \Phi((0,2))>\Phi((1,3))$

更一般地，设区间长度 b $(b>0)$，下证 $\Phi((x_1,x_1+b))>\Phi((x_2,x_2+b))$ ~~对∀对对对成立~~ 对 $\forall x_2>x_1\ge0$ 成立

构造 $g(x)=\Phi(x+b)-\Phi(x)$，$g'(x)=\varphi(x+b)-\varphi(x)$

$x\ge0$ 时 $\varphi(x)$ 是减函数，$\varphi(x+b)-\varphi(x)<0$ 恒成立

故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，对 $\forall x_2>x_1\ge0$，都有 $g(x_1)>g(x_2)$

因此 $\Phi((x_1,x_1+b))>\Phi((x_2,x_2+b))$，$x_2>x_1\ge0$

~~当 x_2、x_1 一正一负或者都是负数时~~

~~由于 $g(x)=\Phi(x+b)-\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x+b}\varphi(t)dt-\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$~~

~~$=\int_{x}^{+\infty}\varphi(t)dt-\int_{x+b}^{+\infty}\varphi(t)dt$~~

~~$=\int$~~