吴诗非 2020011389

P246

1. 设每一页的错误数目为 X. ~~X=0,1,…~~ $X=0,1,2,\cdots,200$

若 X 满足泊松分布，确定参数 α 即可. ~~而 X~B(300~~.

显然 $E(X)=\frac{200}{300}=\frac{2}{3}=\alpha$，故 $\alpha=\frac{2}{3}$

$P(X=0)=\pi_0(\alpha)=e^{-\frac{2}{3}}$

$P(X=1)=\pi_1(\alpha)=\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}}$

故 $P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)$

$=1-e^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}}$

$=1-\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}$

2. 设25个学生中用左手写作业的人有 X 个，$X=0,1,2,\cdots,25$

且 $X\sim B(25,0.04)$

$P(X=0)=\binom{25}{0}0.04^0(1-0.04)^{25}=(1-0.04)^{25}\approx\frac{1}{e}$

3. 设200次中六个面均不同的次数为 X，$X=0,1,2,\cdots,200$

当 $k=0,1,2,\cdots,5$ 时，$k\ll 200$，可认为 X 服从泊松分布

6个骰子共有 6^6 种情况，6个面均不同有 $6!$ 种情况

故每次出现6个面不同的概率 $p=\frac{6!}{6^6}$，$X\sim B(200,\frac{6!}{6^6})$

根据二项分布得到 $E(X)=200\cdot\frac{6!}{6^6}=\frac{250}{81}=\alpha$

故 $P(X=k)=\pi_k(\alpha)=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}=\frac{(\frac{250}{81})^k}{k!}e^{-\frac{250}{81}}$，$k=0,1,2,3,4,5$

6. $B_k(n;p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$

$$\frac{B_k(n;p)}{B_{k-1}(n;p)}=\frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}=\frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{p}{1-p}$$

$B_k(n;p)$单调递增时，$\frac{B_k(n;p)}{B_{k-1}(n;p)}=\frac{n-k+1}{k}\cdot\frac{p}{1-p}>1$

解得 $k<(n+1)p$

同理，单调递减时，$k>(n+1)p$，记 ~~[]~~ $[(n+1)p]$表示$(n+1)p$的整数部分

①即 若$(n+1)p$不是整数，我们有

$B_0(n;p)<B_1(n;p)<\cdots<B_{[(n+1)p]}(n;p)$

$B_{[(n+1)p]+1}>B_{[(n+1)p]+2}>\cdots>B_n$　　只需比较$B_{[(n+1)p]}(n;p)$和$B_{[(n+1)p]+1}(n;p)$即可

~~且 $\frac{B}{\text{由于}[(n+1)p]}<$~~ 由于$[(n+1)p]+1>(n+1)p$，故 $\frac{B_{[(n+1)p]+1}(n;p)}{B_{[(n+1)p]}(n;p)}<1$

因此第$[(n+1)p]$项最大

② 若$(n+1)p$是整数，同理只需比较 $B_{(n+1)p}(n;p)$和$B_{(n+1)p-1}(n;p)$的大小即可

$$\frac{B_{(n+1)p}(n;p)}{B_{(n+1)p-1}(n;p)}=\frac{\binom{n}{np+p}p^{np+p}(1-p)^{n-np-p}}{\binom{n}{np+p-1}p^{np+p-1}(1-p)^{n-np-p+1}}=1$$，故 $B_{(n+1)p}=B_{(n+1)p-1}$

综上，$(n+1)p$不是整数时，最大项是$B_{[(n+1)p]}(n;p)$

$(n+1)p$ 是整数时，最大项是 $B_{(n+1)p}(n;p)$和$B_{(n+1)p-1}(n;p)$

7. $P(X=k)=\pi_k(\alpha)=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{\pi_k(\alpha)}{\pi_{k-1}(\alpha)}=\frac{\alpha^k(k-1)!}{\alpha^{k-1}k!}=\frac{\alpha}{k}$$

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}>1\Rightarrow k<\alpha$$

故 $k<\alpha$时，$\pi_k(\alpha)$单调递增；$k>\alpha$时，$\pi_k(\alpha)$单调递减

①α不是整数时

$\pi_0(\alpha)<\pi_1(\alpha)<\cdots<\pi_{[\alpha]}(\alpha)$，$\pi_{[\alpha]+1}(\alpha)>\pi_{[\alpha]+2}(\alpha)>\cdots>\pi_n(\alpha)>\cdots$

比较$\pi_{[\alpha]}(\alpha)$和$\pi_{[\alpha]+1}(\alpha)$即可，由于$[\alpha]+1>\alpha$

$\therefore\frac{\pi_{[\alpha]+1}(\alpha)}{\pi_{[\alpha]}(\alpha)}<1$，$\pi_{[\alpha]+1}(\alpha)<\pi_{[\alpha]}(\alpha)$

② 若α时整数，只需比较 $\pi_{\alpha-1}(\alpha)$ 和 $\pi_\alpha(\alpha)$即可

$k=\alpha$ 时，$\frac{\pi_\alpha(\alpha)}{\pi_{\alpha-1}(\alpha)}=1$ 即 $\pi_\alpha(\alpha)=\pi_{\alpha-1}(\alpha)$

综上，α不是整数时，最大值是 $\pi_{[\alpha]}(\alpha)$

α 是整数时，最大值是 ~~$\pi_{[\alpha]-1}(\alpha)$~~ $\pi_\alpha(\alpha)$ 和 $\pi_{\alpha-1}(\alpha)$

8. $P(X=c+kh)=\pi_k(\alpha)=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}\quad k=0,1,2,\cdots$

$$E(e^{-\lambda X})=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda(c+kh)}\pi_k(\alpha)$$

$$=e^{-\lambda c-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda hk}\alpha^k}{k!}$$

$$=e^{-\lambda c-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{-\lambda h}\alpha)^k}{k!}\qquad 令x=e^{-\lambda h}\alpha$$

e^x在$x=0$处展开，$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\Rightarrow e^{e^{-\lambda h}\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{-\lambda h}\alpha)^k}{k!}$

$$\therefore E(e^{-\lambda X})=e^{-\lambda c-\alpha}\cdot e^{e^{-\lambda h}\alpha}=e^{\alpha e^{-\lambda h}-\lambda c-\alpha}$$

9.

$$\pi_k(\alpha)*\pi_k(\beta)=\sum_{k=0}^{n}\pi_k(\alpha)\pi_{n-k}(\beta)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}\cdot\frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!}\cdot e^{-\beta}$$

$$=e^{-\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{n!}\cdot\alpha^k\beta^{n-k}$$

$$=e^{-\alpha-\beta}\cdot\frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}e^{-(\alpha+\beta)}=\pi_n(\alpha+\beta)$$

故两个泊松分布的卷积仍然是泊松分布