吴诗非 2020010389

4.100 设来自东方的人数为X，X服从超几何分布

(1) $P(X=10)=\dfrac{\binom{40}{10}\binom{20}{10}}{\binom{60}{20}}$

(2) $P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$=\dfrac{\binom{40}{0}\binom{20}{20}}{\binom{60}{20}}+\dfrac{\binom{40}{1}\binom{20}{19}}{\binom{60}{20}}+\dfrac{\binom{40}{2}\binom{20}{18}}{\binom{60}{20}}$

$=\dfrac{\binom{40}{0}\binom{20}{20}+\binom{40}{1}\binom{20}{19}+\binom{40}{2}\binom{20}{18}}{\binom{60}{20}}$

4.113 (1) $P(U>\chi_2^2)=0.025$ 即 $P(U\leq\chi_2^2)=0.975$

查表可知 $\nu=7$ 时 $\chi^2_{0.975}=16.0$

故 $\chi_2^2=16.0$

(2) 查表可知，$\nu=7$ 时 $\chi^2_{0.5}=6.35$

故 $\chi_1^2=6.35$

(3) 不妨设 $P(U<\chi_1^2)=P(U>\chi_2^2)$

$\because P(\chi_1^2\leq U\leq\chi_2^2)=0.90$

$\therefore P(U<\chi_1^2)=P(U>\chi_2^2)=0.05$，$P(U<\chi_2^2)=0.95$

查表可知，$\nu=7$ 时 $\chi^2_{0.05}=2.17$ $\chi^2_{0.95}=14.1$

故 $\chi_1^2=2.17$，$\chi_2^2=14.1$

4.110 (1) $P(U>\chi^2)=0.05$ 则 $P(U\leq\chi^2)=0.95$

$\nu=8$ 时，查表得 $\chi^2_{0.95}=15.5$

故 $\chi^2=15.5$

(2) $\nu=19$ 时，查表得 $\chi^2_{0.95}=30.1$

故 $\chi^2=30.1$

(3) $\nu=28$ 时，查表得 $\chi^2_{0.95}=41.3$

故 $\chi^2=41.3$

(4) $\nu=40$ 时，查表得 $\chi^2_{0.95}=55.8$

故 $\chi^2=55.8$

扫描全能王 创建

4.119

(1) $P(U>c)=0.05$ 时 $P(U\le c)=0.95$

$\nu=10$时查表得 $t_{0.95}=1.81$

故 $c=1.81$

(2) $P(-c\le U\le c)=0.98$，t分布的密度是偶函数

故 $P(U<-c)=P(U>c)=0.01$，$P(U\le c)=0.99$

$\nu=10$时，查表得 $t_{0.99}=2.76$

故 $c=2.76$

(3) $P(U\le c)=0.20$ 由 $P(U\le c)=P(U\ge -c)=0.20$

$\therefore P(U<-c)=1-0.20=0.80$

查表得 $\nu=10$时，$t_{0.80}=0.879$

$\therefore c=-0.879$

(4) $P(U\ge c)=0.90$，$P(U\le -c)=P(U\ge c)=0.90$

查表得 $\nu=10$时，$t_{0.90}=1.37$

$\therefore c=-1.37$

5.49

(1) 总体的均值 $E(X)=\dfrac{3+7+11+15}{4}=9$

(2) 总体的标准差 $\sigma=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\dfrac{(3-9)^2+(7-9)^2+(11-9)^2+(15-9)^2}{4}}=\sqrt{20}=4.47$

(3) 样本平均的期望等于总体的期望

$E(\bar{X})=E(X)=9$

(4) 样本均的方差 $Var(\bar{X})=\dfrac{Var(X)}{n}=\dfrac{20}{2}=10$

标准差 $\sigma'=\sqrt{Var(\bar{X})}=3.16$

5.50

~~(1) 不 E(X)~~

不放回时，总体均值和方差不变

(1) $E(X)=9$

(2) $\sigma=\sqrt{Var(X)}=2\sqrt{5}=4.47$

(3) 此时样本平均的数学期望 $E(\bar{X})=\dfrac{E(X_1)+E(X_2)}{2}=E(X)=9$ 仍成立

扫描全能王 创建

(4) 根据定理3，此时的方差

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1} = \frac{20}{2}\cdot\frac{4-2}{4-1} = \frac{20}{3}$$

$$\sigma' = \sqrt{Var(\bar{X})} = \sqrt{\frac{20}{3}} = 2.58$$

5.58

(1) 设200个孩子每个是男孩为 B_i，$B_i=1$ 表示是男孩，$1\le i\le 200$

~~个样本中男孩是~~

一个样本中男孩的比例 $P=\frac{\sum_{i=1}^{200}B_i}{200}$，记 $S_{200}=\sum_{i=1}^{200}B_i$

$P\le 40\%$ 即 $S_{200}\le 0.4\times 200=80$

求 $P(S_{200}\le 80)$ 即可，记 $S_{200}^* = \frac{S_{200}-E(S_{200})}{\sigma(S_{200})} = \frac{S_{200}-100}{\sqrt{50}}$

由于 S_{200} 是离散的，因此考虑 $P(S_{200}\le 80.5) = P(S_{200}^*\le -\frac{19.5}{\sqrt{50}})$

根据中心极限定理，$P(S_{200}^*\le -\frac{19.5}{\sqrt{50}}) \approx \Phi(-\frac{19.5}{\sqrt{50}}) = \Phi(-2.76) = 0.0029$

男孩比例低于40%的样本个数预计有 $1000\times 0.0029 = 2.9\approx 3$ 个

(2) 男孩与女孩分布相同，求 $P(80\le S_{200}\le 120)$ 即可

考虑 S_{200} 是离散的，$P(79.5\le S_{200}\le 120.5) = P(-2.90\le S_{200}^*\le 2.90)$

根据中心极限定理，$P(-2.90\le S_{200}^*\le 2.90) = \Phi(2.90)-\Phi(-2.90) = 0.9981-0.0019 = 0.9962$

女~~男~~孩比例在40%~60%的样本个数预计有 $1000\times 0.9962 = 996.2\approx 996$ 个

(3) 求 $P(S_{200}\ge 106)$ 即可

$$P(S_{200}\ge 106.5) = P(S_{200}^*\ge \frac{6.5}{\sqrt{50}}) = P(S_{200}^*\ge 0.78)$$

由中心极限定理，$P(S_{200}^*\ge 0.78) = 1-0.7823 = 0.2177$

男孩比例大于53%的样本个数预计有 $1000\times 0.2177 = 217.7\approx 218$ 个

扫描全能王 创建

5.74

(1) 由于总体服从正态分布，记方差 S^2

则 $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{5S^2}{15} = \frac{S^2}{3}$ 服从自由度 $\nu = 4$ 的卡方分布

$P(S^2 \le 10) = P(\frac{S^2}{3} \le \frac{10}{3})$

查表得 $\nu=4$ 时，$\chi^2_{0.50} = 3.36$，$\chi^2_{0.25} = 1.92$

插值计算 $\chi^2_x = \frac{10}{3}$，$\frac{\frac{10}{3} - 1.92}{x - 0.25} = \frac{3.36 - 1.92}{0.5 - 0.25}$

解得 $x \approx 0.50$

故 $P(S^2 \le 10) = 0.50$

(2) $P(S^2 \ge 20) = P(\frac{S^2}{3} \ge \frac{20}{3})$

查表得 $\nu=4$ 时，$\chi^2_{0.75} = 5.39$，$\chi^2_{0.90} = 7.78$

插值计算 $\chi^2_x = \frac{20}{3}$，$\frac{\frac{20}{3} - 5.39}{x - 0.75} = \frac{7.78 - 5.39}{0.90 - 0.75}$，$x \approx 0.83$

故 $P(\frac{S^2}{3} < \frac{20}{3}) = 0.83$

$P(S^2 \ge 20) = 1 - P(\frac{S^2}{3} < \frac{20}{3}) = 0.17$

(3) $P(5 \le S^2 \le 10) = P(\frac{5}{3} \le \frac{S^2}{3} \le \frac{10}{3})$

查表得 $\nu=4$ 时，$\chi^2_{0.25} = 1.92$，$\chi^2_{0.10} = 1.06$

插值计算 $\chi^2_x = \frac{5}{3}$，$\frac{\frac{5}{3} - 1.06}{x - 0.10} = \frac{1.92 - 1.06}{0.25 - 0.10}$，$x \approx 0.22$

故 $P(\frac{5}{3} \le \frac{S^2}{3} \le \frac{10}{3}) = P(\frac{S^2}{3} \le \frac{10}{3}) - P(\frac{S^2}{3} \le \frac{5}{3}) = 0.50 - 0.22 = 0.28$

$P(5 \le S^2 \le 10) = 0.28$

5.76

记 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{\nu}} = \frac{\bar{X} - 6}{S}$ 根据5.1可得所有T取值如下

$-\infty$	-7	-1	-0.33	0.11
-7	$-\infty$	-1	-0.2	0.25
-1	-1	$\cdots$	1	1
-0.33	-0.2	1	$+\infty$	2.33
0.11	0.25	1	2.33	$+\infty$

满足 $-1 \le T \le 1$ 的有16个

根据 $P(-1 \le T \le 1) = 0.5$ 预测应有 $25 \times 0.5 \approx 13$ 个

产生差异的原因可能是有很多取值落在边界上，比如 $T=-1$ 有4种情况，$T=1$ 也有4种情况，如果计算 $-1 < T \le 1$ 的个数，有12个，此时与预测的12.5比较接近

扫描全能王 创建