吴诗菲 2020010389

20. $P(|X|\ge c)=\int_{-\infty}^{-c}f(u)du+\int_{c}^{+\infty}f(u)du$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2f(u)du$ 被积函数非负

故 $E(X^2)\ge\int_{-\infty}^{-c}u^2f(u)du+\int_{c}^{+\infty}u^2f(u)du$ ， $u^2\ge c^2$

$\ge\int_{-\infty}^{-c}c^2f(u)du+\int_{c}^{+\infty}c^2f(u)du$

$=c^2P(|X|\ge c)$

故 $P(|X|\ge c)\le\frac{E(X^2)}{c^2}$. $\forall c>0$ 成立

21.

记 $Y=|X-m|$, $Y\ge0$

①若Y有密度函数 $f_y(u)$

$P(|X-m|>c)=P(Y>c)=\int_{c}^{+\infty}f_y(u)du$

$E(|X-m|)=E(Y)=\int_{0}^{+\infty}uf_y(u)du\ge\int_{c}^{+\infty}uf_y(u)du\ge\int_{c}^{+\infty}cf_y(u)du=cP(Y>c)$

故 $P(Y>c)<\frac{1}{c}E(Y)$ ， $P(|X-m|>c)<\frac{1}{c}E(|X-m|)$

②若Y是离散的，没有密度函数

~~$P(Y>c)=\sum$~~ 记Y所有取值构成的集合为A. A中大于c的所有元素构成B. $B\subseteq A$

故 $E(Y)=\sum_{k\in A}kP(Y=k)\ge\sum_{k\in B}kP(Y=k)\ge\sum_{k\in B}cP(Y=k)=c\sum_{k\in B}P(Y=k)=cP(Y>c)$

故 $P(Y>c)<\frac{1}{c}E(Y)$

综上， $P(|X-m|>c)<\frac{1}{c}E(|X-m|)$

23. X分布函数 $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)du$ ， $x\in\mathbb{R}$

$F_{|X|}(x)=P(|X|\le x)=P(-x\le X\le x)=F_X(x)-F_X(-x)$

$=\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)du-\int_{-\infty}^{-x}\varphi(u)du$

$=\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)du-(1-\int_{-x}^{+\infty}\varphi(u)du)$

$=2\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)du-1$

$=2F_X(x)-1=2\Phi-1$ ， $x\ge0$

故 $|X|$ 的分布函数是 $2\Phi(x)-1$

25. X^2的分布函数 $F_{X^2}(x)=P(X^2\le x)=P(-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x})=2P(X\le\sqrt{x})-1$

$$F_{X^2}(x)=2\int_{-\infty}^{\sqrt{x}}\varphi(u)du-1$$

X^2的密度 $f(x)=F'_{X^2}(x)=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\varphi(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}$, $x\ge0$

根据密度函数的归一化条件，$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2x}}e^{-\frac{x}{2}}dx=1$

令 $t=\frac{x}{2}$, $dt=\frac{1}{2}dx$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-t}\cdot2dt=1\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}=\sqrt{\pi}$$

29. 记 $Z=|X-Y|\ge0$

根据 Chebyshev's 不等式，$P(Z>\varepsilon)\le\frac{1}{\varepsilon^2}E(Z^2)=0$，$\forall\varepsilon>0$ 恒成立

又 $\because P(Z>\varepsilon)\ge0$

$\therefore P(Z>\varepsilon)=0$，$\forall\varepsilon>0$ 恒成立

根据概率归一化，$P(\Omega)=1$，$P(\Omega)=P(Z=0)+P(Z>0)=P(Z=0)=1$

故 $P(|X-Y|=1)\Rightarrow P(X=Y)=1$

30. 令 $X^0=X-E(X)$，$Y^0=Y-E(Y)$，则 $\tilde{X}=X^0\sigma(X)$，$\tilde{Y}=Y^0\sigma(Y)$

$$\rho(X,Y)=\frac{E(X^0Y^0)}{\sqrt{E((X^0)^2)E((Y^0)^2)}}=\frac{E(\tilde{X}\tilde{Y})\sigma(X)\sigma(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)\sqrt{E((\tilde{X})^2)E((\tilde{Y})^2)}}=1$$

故 $E(\tilde{X}\tilde{Y})=\sqrt{E(\tilde{X}^2)E(\tilde{Y}^2)}$

$\sigma^2(\tilde{X})=1=E(\tilde{X}^2)-E^2(\tilde{X})=E(\tilde{X}^2)$

同理 $E(\tilde{Y}^2)=1$，故 $E(\tilde{X}\tilde{Y})=1$

$E((\tilde{X}-\tilde{Y})^2)=E(\tilde{X}^2)+E(\tilde{Y}^2)-2E(\tilde{X}\tilde{Y})=1+1-2=0$

由29可知，$\tilde{X}=\tilde{Y}$ 恒成立

若 $\rho(X,Y)=-1$，$E(\tilde{X}\tilde{Y})=-\sqrt{E(\tilde{X}^2)E(\tilde{Y}^2)}=-1$

$E((\tilde{X}-\tilde{Y})^2)=4\ne0$

结论不成立

4.75

(1) $\int_{-\infty}^{-1.78}\varphi(u)du = \int_{1.78}^{+\infty}\varphi(u)du = 0.5-0.4625 = 0.0375$

(2) $\int_{-\infty}^{0.56}\varphi(u)du = \cancel{\frac{1}{2}}\,0.5+\int_{0}^{0.56}\varphi(u)du = 0.5+0.2123 = 0.7123$

(3) $\int_{-1.45}^{+\infty}\varphi(u)du = 0.5+\int_{0}^{1.45}\varphi(u)du = 0.5+0.4265 = 0.9265$

(4) $\int_{2.16}^{+\infty}\varphi(u)du = \overset{0.5}{\cancel{1}}-\int_{0}^{2.16}\varphi(u)du = 0.5-0.4846 = 0.0154$

(5) $\int_{-0.80}^{1.53}\varphi(u)du = \int_{0}^{1.53}\varphi(u)du+\int_{0}^{0.80}\varphi(u)du = 0.4370+0.2881 = 0.7251$

(6) $\int_{-\infty}^{-2.52}\varphi(u)du+\int_{1.83}^{+\infty}\varphi(u)du = 1-\int_{0}^{2.52}\varphi(u)du-\int_{0}^{1.83}\varphi(u)du$

$= 1-0.4941-0.4664$

$= \cancel{0.0495}\,0.0395$

4.78 $P(Z\ge z_1)=0.84 \Rightarrow P(Z\le z_1)=0.16 \Rightarrow P(0<Z\le -z_1)=0.34$

查表知 $-z_1\approx 0.995$ $z_1=-0.995$

4.79 $\mu=5$, $\sigma=2$, 记 $X^*=\frac{X-5}{2}$, $X^*\sim N(0,1)$

$P(X>8)=P(2X^*+5>8)=P(X^*>1.5)=\cancel{1-}\,0.5-0.4332=0.0668$

4.91 设X表示100个灯泡中有问题的个数，X近似服从泊松分布

参数 $\alpha=E(X)=100\times3\%=3$

(1) $P(X>5)=1-P(X\le5)$

$=1-\sum_{k=0}^{5}\frac{3k}{k!}e^{-3}$

$=1-\frac{92}{5}e^{-3}$

(2) $P(1\le X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=3e^{-3}+\frac{9}{2}e^{-3}+\frac{9}{2}e^{-3}=12e^{-3}$

(3) $P(X\le2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$=e^{-3}+3e^{-3}+\frac{9}{2}e^{-3}$

$=\frac{17}{2}e^{-3}$