《微积分 T3》期中参考答案

本试卷分两页, 共六道试题, 其中第 3, 4 题每题 20 分, 其余每题各 15 分.

1. (1) 设 f 是周期为 2π 的函数, 且有连续的导函数. 请用 f 的傅立叶系数表示其导函数 f' 的傅立叶系数.

   (2) 设 f 是周期为 2π 的可积函数, 其傅立叶级数为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{inx}$. 设 m 是正整数, 已知 f 满足对任何 x 都有 $f(x+\frac{2\pi}{m})=f(x)$. 证明: 当 n 不是 m 的倍数时, 有 $\widehat{f}(n)=0$.

解. (1) 利用分部积分, 可得

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(f(x)e^{-inx}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}(-in)dx\right) \\
&= \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&= in\widehat{f}(n).
\end{aligned}$$

(2) 假设 n 不是 m 的倍数. 将 $[0,2\pi]$ 分拆成 $\bigcup_{j=1}^m[\frac{2(j-1)\pi}{m},\frac{2j\pi}{m}]$, 可得

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^m\int_{\frac{2(j-1)\pi}{m}}^{\frac{2j\pi}{m}} f(x)e^{-inx}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^m\int_0^{\frac{2\pi}{m}} f\left(\frac{2(j-1)\pi}{m}+x\right)e^{-in(x+\frac{2(j-1)\pi}{m})}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{m}} f(x)e^{-inx}\sum_{j=1}^m e^{\frac{-2(j-1)in\pi}{m}}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{m}} f(x)e^{-inx}\frac{1-(e^{\frac{-2in\pi}{m}})^m}{1-e^{\frac{-2in\pi}{m}}}dx\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

2. 设 f,g 是周期为 2π 的连续函数, 定义函数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)dy.$$

请用 f,g 的傅立叶系数表示 h 的傅立叶系数, 需要给出计算过程.

解. 令 $x-y=u, y=v$, 利用二重积分的换元公式可得

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)e^{-inx}dx\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)dye^{-inx}dx\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\iint_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} f(x-y)g(y)e^{-inx}dxdy\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-v\le u\le 2\pi-v,0\le v\le 2\pi} f(u)g(v)e^{-in(u+v)}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} g(v)e^{-inv}dv\int_{-v}^{-v+2\pi} f(u)e^{-inu}du\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(v)e^{-inv}dv\cdot\widehat{f}(n)\\
&= \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).
\end{aligned}$$

□

3. 设 f 是周期为 2π 的函数, 在一个周期内的定义为:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2}, & \text{当 } 0\le x<2\pi \text{ 时},\\ \frac{\pi}{2}, & \text{当 } x=2\pi \text{ 时},\end{cases}$$

(1) 求 f 的 Fourier 级数.

(2) 对 f 利用 Fourier 级数的逐点收敛定理, 可以得到什么恒等式? 需要给出计算过程.

(3) 对 f 利用帕塞瓦尔等式, 可以得到什么恒等式? 需要给出计算过程.

解. (1) 由 $\int_0^{2\pi} f(x)dx=0$ 可知 $\widehat{f}(0)=0$. 对 $n\neq 0$, 有

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}e^{-inx}dx\\ &=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x\left(\frac{e^{-inx}}{in}\right)'dx\\ &=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{xe^{-inx}}{in}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{e^{-inx}}{in}dx\right)\\ &=\frac{1}{2ni}.\end{aligned}$$

由此得到 f 的傅立叶级数为

$$f\sim\sum_{n\neq 0}\frac{1}{2ni}e^{inx}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

(2) 注意到, f 在 $(0,2\pi)$ 上处处可微, 利用 Fourier 级数的逐点收敛定理可知: 对 $x\in(0,2\pi)$, f 的傅立叶级数在点 x 处收敛到 $f(x)$, 即有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},\quad \forall x\in(0,2\pi).$$

(3) 利用帕塞瓦尔等式, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2dx = \sum_{n\neq 0}\frac{1}{4n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

直接积分可知

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2dx = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\pi-x)^2dx = \frac{-(\pi-x)^3}{12}\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^3}{6},$$

由此可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

4. 判断如下反常积分的收敛发散性, 需要证明你的断言.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$, 其中 p 是正数.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x^2)}{x}dx$.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$, 其中 p,q 是正数.

解. (1) 利用分部积分可得

$$\int_1^A\frac{\sin x}{x^p}dx = \frac{-\cos x}{x^p}\Big|_1^A - \int_1^A\frac{\cos x}{x^{1+p}}dx,$$

从而有

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{1+p}}dx.$$

注意到, $|\frac{\cos x}{x^{1+p}}| \leq \frac{1}{x^{1+p}}$, 由比较定理可得 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{1+p}}dx$ 绝对收敛, 进而收敛.

结合起来可得对正数 p, 无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛.

(2) 对正数 $A>1$, 令 $x^2=y$ 换元, 可得

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{\cos(x^2)}{x}dx &= \int_1^{A^2} \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}dy \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{A^2}\frac{(\sin y)'}{y}dy \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin y}{y}\Big|_1^{A^2} + \int_1^{A^2}\frac{\sin y}{y^2}dy\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(A^2)}{A^2} - \frac{\sin 1}{1} + \int_1^{A^2}\frac{\sin y}{y^2}dy\right).\end{aligned}$$

注意到, $|\frac{\sin y}{y^2}|\le\frac{1}{y^2}$, 由比较定理可知无穷积分 $\int_1^\infty \frac{\sin y}{y^2}dy$ 收敛, 即有

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A^2}\frac{\sin y}{y^2}dy = \int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}dy$$

极限存在. 代回可得

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\cos(x^2)}{x}dx = \frac{1}{2}\left(\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}dy - \sin 1\right),$$

表明 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x^2)}{x}dx$ 收敛.

(3) 不妨设 $p\le q$.

先考虑无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$. 注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^p+x^q}}{\frac{1}{x^q}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^{p-q}} = \begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{如果 } p=q \\ 1, & \text{如果 } p<q\end{cases}$$

由比较定理的极限形式可知, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^q}$ 有相同的收敛发散性, 它们收敛当且仅当 $q>1$.

先考虑瑕积分 $\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}$. 注意到

$$\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x^p+x^q}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to0+}\frac{1}{1+x^{q-p}} = \begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{如果 } p=q \\ 1, & \text{如果 } p<q\end{cases}$$

由比较定理的极限形式可知, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p+x^q}$ 与 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 有相同的收敛发散性, 它们收敛当且仅当 $p<1$.

结合起来可得, 在条件 $p \le q$ 下反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$ 收敛的充要条件为 $p<1<q$. 若不假设 p,q 的大小关系, 则题述反常积分收敛的充要条件是 $\min\{p,q\}<1<\max\{p,q\}$.

□

5. (1) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx$ 收敛.

(2) 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx$ 的值.

解. (1) 由于

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} = \lim_{x\to 0+} x\ln x = 0,$$

可知 $x=0$ 是被积函数的可去间断点, 故 $\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx$ 是黎曼积分.

考虑无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx$, 有

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3\ln x}{(1+x^2)^2} = 0,$$

由比较定理可得无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx$ 收敛.

结合起来可得反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx$ 收敛.

(2) 令 $y=\ln x$, 由换元公式可得

$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{1/A}^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-\ln A}^0 \frac{e^{2y}y}{(1+e^{2y})^2} dy,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{\ln A} \frac{e^{2y}y}{(1+e^{2y})^2} dy,$$

从而有

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-\ln A}^{\ln A} \frac{e^{2y}y}{(1+e^{2y})^2} dy.$$

注意到, 若令 $g(y)=\frac{e^{2y}y}{(1+e^{2y})^2}$, 则有

$$g(-y)=\frac{-e^{-2y}y}{(1+e^{-2y})^2}=\frac{-ye^{2y}}{(e^{2y}+1)^2}=-g(y),$$

表明 $g(y)$ 是奇函数. 由此可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-\ln A}^{\ln A}\frac{e^{2y}y}{(1+e^{2y})^2}dy=\lim_{A\to+\infty}0=0.$$

□

(2) *的另一个解法.* 令 $y=\frac{1}{x}$ 换元可得

$$\int_0^1\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=\int_{+\infty}^1\frac{\frac{1}{y}\ln\frac{1}{y}}{(1+y^{-2})^2}\cdot(-y^{-2})dy=-\int_1^{+\infty}\frac{y\ln y}{(1+y^2)^2}dy,$$

因而有 $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=0.$

□

6. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数, 有连续的导函数, 且满足 $\int_0^{2\pi}f(x)dx=0$. 利用帕塞瓦尔等式证明:

$$\int_0^{2\pi}f(x)^2dx\le\int_0^{2\pi}f'(x)^2dx.$$

证明: 由条件 $\int_0^{2\pi}f(x)dx=0$ 可知 $\widehat{f}(0)=0$. 利用第一题第 (1) 问的结论, 有 $\widehat{f'}(n)=in\widehat{f}(n)$. 这样, 利用帕塞瓦尔等式可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(n)|^2=\sum_{n\neq0}|\widehat{f}(n)|^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'(x)^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2|\widehat{f}(n)|^2=\sum_{n\neq0}n^2|\widehat{f}(n)|^2,$$

且上述式子的右边都是收敛的级数. 注意到, 对 $n\neq0$, 有 $|\widehat{f}(n)|^2\le n^2|\widehat{f}(n)|^2$, 从而有

$$\sum_{n\neq0}|\widehat{f}(n)|^2\le\sum_{n\neq0}n^2|\widehat{f}(n)|^2,$$

由此得证题述不等式.

□