# 《微积分 T3》第一次习题课材料

时间: 周二与周六第 6 节. 地点: 旧水利馆 301.

1. [Stein & Shakarchi 书上 39 页定理 2.1]

   设 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的连续函数, 已知其所有的 Fourier 系数都等于零. 证明: 若 $x_0$ 是 $f$ 的连续点, 则有 $f(x_0)=0$.

2. 设 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的函数, 且有连续的 $k$ 阶导数 (即 $f$ 是 $C^k$ 光滑函数). 证明: 存在常数 $C$, 使得对任何非零整数 $n$ 都有
$$|\widehat{f}(n)| \le \frac{C}{|n|^k}.$$

3. (1)(作业题) 设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 $f(x)=|x|$, 求 $f$ 的 Fourier 级数.

   (2) 取 $x=0$, 证明:
$$\sum_{n\ge 1\text{是奇数}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8};\quad \sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

   (3) 利用帕塞瓦尔等式 (Parseval's identity) 计算如下两个级数的值:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

   (答案见 Stein & Shakarchi 书上 89 页).

4. (1)(作业题) 设 $g(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的奇函数, 且在 $[0,\pi]$ 上有 $g(x)=x(\pi-x)$. 求 $g$ 的 Fourier 级数.

   (2) 证明:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960};\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

5. 设 $\alpha$ 不是整数. 证明: $[0, 2\pi]$ 上的函数

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

的傅立叶级数为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n + \alpha}.$$

利用帕塞瓦尔等式 (Parseval's identity) 证明:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n + \alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi\alpha)^2}.$$

6. Stein & Shakarchi 书上 91 页练习 12.

7. Stein & Shakarchi 书上 91 页练习 11.

8. 讲评其他作业题.