《微积分 T3》第二次习题课材料

时间: 周二第 6 节. 地点: 旧水利馆 301. 周三第 6 节. 地点: 二教 402

1 设函数 $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ 满足: 对每个 $c>0$, f 在区间 $[c,1]$ 上可积. 定义瑕积分

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{c\to 0+}\int_c^1 f(x)dx.$$

证明: 若 f 在 $[0,1]$ 上可积, 则上述定义的瑕积分等于 f 在 $[0,1]$ 上的黎曼积分.

2 [《高等微积分教程 (上)》205, 206 页] 判断下列积分的收敛发散性.

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}}dx$.

(2) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x-x^3}}dx$.

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^n}dx$.

(4) $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$.

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\arctan x}{1+x^q}dx$, 其中 p,q 是正数.

(6) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt{\ln x}}dx$, 其中 p 是正数.

(7) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln x dx$, 其中 p,q 是正数.

(8) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$, 其中 p 是正数.

3 [《高等微积分教程 (上)》207 页] 求广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx$ 的值.

4 (1) 利用分部积分证明: 无穷积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

(2) 证明: 对正数 λ, 如下的无穷积分

$$I(\lambda)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\lambda x}dx$$

收敛.

(3) 通过将 $[0,\infty)$ 分拆成区间之并

$$[0,+\infty)=\bigcup_{n=0}^{\infty}[2n\pi,2(n+1)\pi],$$

证明无穷积分 $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ 发散.

5 [Stein & Shakarchi 书上 91 页练习 12] (1) 证明: 第 N 个狄利克雷核

$$D_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}=\frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于 2π.

(2) 定义函数 $f(x)=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}-\frac{2}{x}=\frac{x-2\sin\frac{x}{2}}{x\sin\frac{x}{2}}$. 证明: $x=0$ 是 f 的可去间断点, 进而 f 可延拓成区间 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数.

(3) 利用 Riemann-Lebesgue 引理证明:

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\sin(N+\frac{1}{2})x\right)dx=0.$$

(4) 结合第 (1), (3) 小问的结论证明:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}.$$