微积分A(2)期末考试样题参考解答

一、填空题(共8小题, 每小题3分, 共24分)

1. 三重积分

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(x^2y^2z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\underline{\qquad\qquad}.$$

答: 积分值为 0.

注记: 因为被积函数关于坐标 z 是奇函数, 且单位球面关于 Oxy 平面对称, 故三重积分为零.

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-4$ 处条件收敛, 记 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^n$ 的收敛半径为 R, 则 R 的最小值是 $\underline{\qquad\qquad}$.

答: 收敛半径 R 的最小值为 16.

注记: 由于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-4$ 处条件收敛, 故这个幂级数的收敛半径为 4, 即

$$4=\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\quad \text{或}\quad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{4}.$$

因此

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_{2n}|}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\sqrt[2n]{|a_{2n}|}\right)^2\le\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

由此可见幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^n$ 的收敛半径 R 满足

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_{2n}|}}\ge\frac{1}{\frac{1}{16}}=16.$$

以下说明, 存在幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 使得 (i) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-4$ 处条件收敛; (ii) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^n$ 的收敛半径为 16. 例如取 $a_n=\frac{1}{n4^n}$, 则不难验证幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 满足条件 (i) 和 (ii). 因此收敛半径为 R 的最小值为 16.

3. 设定向曲线 $L^+ : x = t, y = t^2, z = t^4$, $0 \le t \le 1$, 参数 t 增加方向与曲线正向一致, 则

$$\int_{L^+} 9y\mathrm{d}x - 3x\mathrm{d}y + 4z\mathrm{d}z = \underline{\qquad\qquad}.$$

答: 线积分值为 3.

解:

$$\int_0^1 9t^2\mathrm{d}t - 3t\mathrm{d}t^2 + 4t^4\mathrm{d}t^4 = \int_0^1 (3t^2 + 16t^7)\mathrm{d}t = 3.$$

4. 已知曲线积分 $\int_{L^+} (2x^2 + axy)\,\mathrm{d}x + (x^2 + 3y^2)\,\mathrm{d}y$ 与积分路径无关(只与曲线的起点和终点有关), 则实数 $a = \underline{\qquad\qquad}$.

答: $a = 2$.

注记: 由于平面向量场 $F(x, y) = (2x^2 + axy, x^2 + 3y^2)$ 在全平面上连续可微, 故场 F 积分与路径无关, 当且仅当场 F 无旋, 即 $rotF = 0$, 亦即 $2x - ax = 0$. 故 $a = 2$.

5. 设 $\vec{\mathrm{F}}(x, y, z) = (yz, zx, x^2)$, 则 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{F}}(x, y, z)) = \underline{\qquad\qquad}$.

答: $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{F}}(x, y, z)) = 0$.

注记: 实际上, 对任意 C^2 向量场 $\vec{\mathrm{F}}$, $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{F}}) = 0$. 这一事实可表述为, 旋度场是无源场.

6. 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ 右侧部分的封闭曲线 (即 $x \ge 0$) 所围图形的面积为 $\underline{\qquad\qquad}$.

答: 所求面积为 1.

解: 考虑曲线 $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ 在极坐标 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 下的方程为 $r^2 = 2\cos 2\theta$. 由于 $r \ge 0$ 且 $x > 0$, 故 $|\theta| \le \frac{\pi}{4}$. 于是所求图形的面积为

$$\iint_D dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2\cos 2\theta}} rdr = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = 1.$$

7. 圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 夹在锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和平面 $z = 0$ 之间部分的面积为 $\underline{\qquad\qquad}$.

答: 所求面积为 8.

解: 由第一型线积分的几何意义知, 所求圆柱面部分的面积为

$$\oint_{x^2+y^2=2x}\sqrt{x^2+y^2}d\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}d\theta=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sin(\theta/2)d\theta=4\int_0^{\pi}\sin u du=8.$$

8. 空间曲线 L^+ 为柱面 $|x|+|y|=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 其正向为围绕 z 轴的正方向逆时针旋转, 则

$$\oint_{L^+}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

答: 积分值为 12.

解: 取曲面 $\Sigma=\{(x,y,z)|\,x+y+z=0,|x|+|y|\le 1\}$, 其单位正法向量为 $\vec{\mathrm{n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. 定向曲面 Σ^+ 与其边界 L^+ 的定向协调. 因此在 Σ^+ 上用应用 Stokes 公式得

$$\begin{aligned}&\oint_{L^+}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z\\&=\iint_{\Sigma}\mathrm{rot}\,(z-y,x-z,y-x)\cdot\vec{\mathrm{n}}\mathrm{d}S\\&=\iint_{\Sigma}(2,2,2)\cdot\vec{\mathrm{n}}\mathrm{d}S=2\sqrt{3}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S\\&=2\sqrt{3}\iint_{|x|+|y|\le 1}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12.\end{aligned}$$

二. 单选题（共7小题, 每小题3分, 共21分）

1. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上 ________.

A. 绝对收敛, 且一致收敛;

B. 绝对收敛, 但不一致收敛;

C. 条件收敛, 且一致收敛;

D. 条件收敛, 但不一致收敛.

选 A.

解: 由于

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+x^2}\right| \le \frac{1}{n^2},$$

故根据 Weierstrass 一致收敛性判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对收敛, 且一致收敛.

2. 设 $f(x)$ 为 2π 周期函数, 且在区间 $(-\pi, \pi]$ 上如下定义

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \pi \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

利用 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 可得级数

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$$

的和为 ________.

A. $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$;

B. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$;

C. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

D. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

选 D.

解: 简单计算可知函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

根据 Dirichlet 的收敛性定理知上述 Fourier 级数处处收敛, 且

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\begin{cases}1, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=0,\pi,-\pi,\\ -1, & -\pi<x<0.\end{cases}$$

令 $x=\frac{\pi}{4}$ 得

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots\right)=1.$$

因此

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3. 设 a 为常数, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(na)}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ __________.

A. 绝对收敛;

B. 条件收敛;

C. 发散;

D. 收敛性与 a 的取值有关.

选 B.

解: 显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n^2}$ 绝对收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛, 故这两个级数的和, 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(na)}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ 条件收敛.

4. 设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$, 记

$$\begin{aligned}I_1&=\iint_D\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}+100(x+y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ I_2&=\iint_D\left(\cos(x^2+y^2)+10(x+y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ I_3&=\iint_D\left(\cos\left((x^2+y^2)^2\right)+x+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

以下结论正确的是 __________.

A. $I_1 < I_2 < I_3$;

B. $I_2 < I_1 < I_3$;

C. $I_3 < I_2 < I_1$;

D. $I_3 < I_1 < I_2$.

选 A.

注: 由积分域 $D: x^2 + y^2 \le 1$ 的对称性知, 函数 x 和 y 在 D 上的积分为零. 再根据函数 $\cos u$ 的单调性, 即可得到积分 I_1, I_2 和 I_3 的大小关系.

5. 记 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ 的和函数为 $S(x)$, 则 $S'(\frac{1}{2}) =$ __________.

A. $\ln 2 - \ln 3$

B. $\ln 3 - \ln 2$

C. $-\ln 2$

D. $\ln 2$

选 D.

解: 显然幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径为 1. 根据幂级数性质可知, 和函数 $S(x)$ 可以在开区间 $(-1, 1)$ 上逐项求导, 即

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = -\ln(1-x).$$

故 $S'(\frac{1}{2}) = \ln 2$.

6. 积分 $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) \mathrm{d}x =$ __________.

A. 2π

B. 4π

C. 6π

D. 8π

选 A.

解:

$$\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x = \iint_{x^2+y^2\le 4, x,y\ge 0} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{0\le r\le 2, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}} r^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^2 r^3\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

7. 设 Ω 为单位球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$, 则流速场 $\vec{\mathrm{F}}(x,y,z)=(x+yz, y+zx, z+xy)$ 在单位时间中流出 Ω 的流量

$$\iint_{\partial\Omega^+} \vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\mathrm{n}}\,\mathrm{d}S = \underline{\hspace{4cm}}.$$

A. π;

B. 2π;

C. 4π;

D. 0.

选 C.

解:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\iint_{\partial\Omega^+}(x+yz, y+zx, z+xy)\cdot(x,y,z)\mathrm{d}S \\
=&\textstyle\iint_{\partial\Omega^+}(x^2+y^2+z^2+3xyz)\mathrm{d}S \\
=&\textstyle\iint_{\partial\Omega^+}(1+3xyz)\,\mathrm{d}S \\
=&\textstyle\iint_{\partial\Omega^+}\mathrm{d}S \\
=&\,4\pi
\end{aligned}$$

三、解答题（共5题, 每题11分, 共55分）

1. 设 $D=\{(x,y)|x\ge 0, y\ge 0, 0\le x+y\le 2\}$, 计算二重积分 $\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解: 作线性变换 ϕ: $(x,y)\mapsto(u,v)=(y-x, y+x)$, 则变换 ϕ 的 Jacobi 行列式为

$$\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -2.$$

于是逆变换 ϕ^{-1} 的 Jacobi 行列式为 $\frac{-1}{2}$. 显然线性变换 ϕ 将直线 $x+y=2$ 变为直线 $v=2$; 将 y 轴即 $x=0$ 变成直线 $v-u=0$; 将 x 轴即 $y=0$ 变成直线 $v+u=0$. 由此可见线性变换 ϕ 将 xy 平面上的三角闭域 D 映射称 uv 平面上的三角闭域 $D'=\{(u,v), 0\le v\le 2,\ -v\le u\le v\}$. 因此

$$\begin{aligned}
\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{-v\le u\le v, 0\le v\le 2}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= \iint_{-v\le u\le v, 0\le v\le 2}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\left|\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= \frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 v\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}\frac{u}{v}\\
&= \frac{1}{2}(e-e^{-1})\int_0^2 v\mathrm{d}v\\
&= \mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}.
\end{aligned}$$

注记: 对于上述二重积分, 还有可以作其他线性变换, 例如 $u=x$, $v=x+y$; 或者作非线性变换, 例如 $u=x+y$, $v=\frac{y-x}{y+x}$. 在选定一种变量代换后, 一项重要的事情是确定变换将 xy 平面上的三角闭域 D 变成 uv 平面上什么样的闭域 D'? 在这件事情上同学常常出现错误.

2. 计算曲面积分

$$I=\iint_{S^+}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

其中 S^+ 为曲面 $1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}\ (z\ge 0)$ 的上侧.

解: 注意向量场

$$F(x,y,z)=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

是无源场, 即 $\operatorname{div}\mathrm{F}=0$, 故可考虑应用 Gauss 定理化简积分. 以原点为中心, 以充分小的正数 $r>0$ 为半径作一个上半球面 Γ_r, 使得 Γ_r 位于曲面 S 的下方, Γ_r^+ 为 Γ_r 外侧. 记 Σ_r 为 $z=0$ 平面上满足 $x^2+y^2\ge r^2$, $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}\le 1$ 的部分, 记 Σ_r^+ 为 Σ_r 的上侧, V_r 为 S 与 Σ_r 和 Γ_r 围成的空间有界闭区域, 则由 Gauss 公式得

$$I-\iint_{\Gamma_r^+\cup\Sigma_r^+}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{S^+\cup\Gamma_r^-\cup\Sigma_r^-} \frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\
&= \iiint_{V_r} (\mathrm{div}\ \mathrm{F})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0
\end{aligned}
$$

因为 Σ_r 在 $z=0$ 从而 $\mathrm{d}z=0$, 所以

$$
\iint_{\Sigma_r^+} \frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = 0
$$

于是我们得到

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Gamma_r^+} \frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\
&= \iint_{\Gamma_r^+} \frac{(x,y,z)}{r^3}\cdot n dS = \iint_{\Gamma_r^+} \frac{(x,y,z)}{r^3}\cdot\frac{(x,y,z)}{r} dS \\
&= \iint_{\Gamma_r} \frac{1}{r^2}\mathrm{d}S = \frac{1}{r^2}|S| = \frac{1}{r^2}\cdot 2\pi r^2 = 2\pi.
\end{aligned}
$$

解答完毕.

3. 求如下幂级数的收敛半径及其和函数

$$
S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} x^{2n-1}. \quad (*)
$$

解: 记

$$
a_n = \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!},
$$

则

$$
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+1}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2n+3} \to 0.
$$

因此 $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$. 故幂级数(*)的收敛半径为 $+\infty$. 根据幂级数性质我们有

$$
\int_0^x S(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = \frac{\sin x}{2x} - \frac{1}{2}.
$$

再对上式两边求导得

$$
S(x) = \left(\frac{\sin x}{2x} - \frac{1}{2}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{2x^2}.
$$

4. 已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 由以下等式确定

$$b_n = \ln\left(\mathrm{e}^{a_n} - a_n\right), \quad \forall n \geq 1.$$

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 收敛.

证明: 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

$$b_n = \ln\left(\mathrm{e}^{a_n} - a_n\right) = \ln\left(1 + \frac{a_n^2}{2}(1+o(1))\right) = \frac{a_n^2}{2}(1+o(1)), \quad n \to +\infty.$$

所以

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{a_n}{2}(1+o(1)), \quad n \to +\infty.$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 收敛.

5. 记 S 为单位球面 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, $A = [a_{ij}]$ 为三阶实对称矩阵. 证明

$$\iint_S x^T A x \, dS = \frac{4\pi}{3}\mathrm{tr}(A),$$

其中 $\mathrm{tr}(A)$ 表示矩阵 A 的迹, 即 $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

<u>证法一</u>: 利用 Gauss 定理证明. 将被积函数 $x^T A x$ 表示为 $x^T A x = \vec{F}(x) \cdot x$, 其中向量场 $\vec{F}(x)$ 定义如下

$$\vec{F}(x) = \left(\sum_{j=1}^{3} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{3} a_{2j}x_j, \sum_{j=1}^{3} a_{3j}x_j\right)^T.$$

注意单位球面 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 上朝外的单位法向量可表为 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. 因此根据 Gauss 定理得

$$\iint_S x^T A x \, dS = \iint_S (\vec{F}(x) \cdot x) dS = \iiint_{x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 1} \mathrm{div}\vec{F}(x) dV$$

$$= \iiint_{x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 1} (a_{11} + a_{22} + a_{33}) dV = \mathrm{tr}(A)|V| = \frac{4\pi}{3}\mathrm{tr}(A).$$

<u>证法二</u>: 利用单位球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 的对称性不难证明

$$\iint_S x_i x_j\,dS=0,\quad \forall i,j=1,2,3,\quad i\neq j.$$

例如证明

$$\iint_S x_2x_3\,dS=0.$$

球面 S 看作上下两个半球面的之并 $S=S_1\cup S_2$, 其中 S_1: $x_3=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$, S_2: $x_3=-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$. 于是

$$\iint_{S_1} x_2x_3\,dS=\iint_{x_1^2+x_2^2\leq 1} x_2\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\cdot\sqrt{1+f_{x_1}^2+f_{x_2}^2}dx_1dx_2,$$

$$\iint_{S_2} x_2x_3\,dS=-\iint_{x_1^2+x_2^2\leq 1} x_2\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\cdot\sqrt{1+f_{x_1}^2+f_{x_2}^2}dx_1dx_2,$$

其中 $f(x_1,x_2)=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$. 这就证明了

$$\iint_S x_2x_3\,dS=0.$$

于是

$$\iint_S x^TAx\,dS=\iint_S\left(\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j\right)dS=\iint_S\left(\sum_{i=1}^3 a_{ii}x_i^2\right)dS.$$

再次利用单位球面的对称性易知

$$\iint_S x_1^2dS=\iint_S x_2^2dS=\iint_S x_3^2dS$$
$$=\frac{1}{3}\iint_S(x_1^2+x_2^2+x_3^2)dS=\frac{1}{3}\iint_S dS=\frac{4\pi}{3}.$$

于是

$$\iint_S x^TAx\,dS=\iint_S\left(\sum_{i=1}^3 a_{ii}x_i^2\right)dS$$
$$=a_{11}\iint_S x_1^2dS+a_{22}\iint_S x_2^2dS+a_{33}\iint_S x_3^2dS$$
$$=(a_{11}+a_{22}+a_{33})\frac{4\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\mathrm{tr}(A).$$

命题得证.