2022年
2月

复习 & 衔接
微课程

《向量的几何属性》

§4 $\mathbb{R}^3$中的二次曲面及其分类

杨晶 主讲

本讲提要

空间曲面与方程 & 空间二次曲面

一、空间曲面与方程
- 球面, 柱面, 旋转面, 直纹面

二、常见的空间二次曲面及其标准方程

1、椭球面 2、单叶双曲面 3、双叶双曲面
4、椎面 5、椭圆抛物面 6、双曲抛物面

三、一般空间二次曲面的化简

一、空间曲面与方程

问题：如何在$\mathbb{R}^2$中建立一条曲线？

- 几何方式1：点按某一特定规律运动的轨迹.
  如: 点(1,0)绕原点旋转一周的轨迹是单位圆
- 几何方式2：满足某一特定条件的点集.
  如: 所有与原点距离为1的点集，也是单位圆
- 代数方式1：对应上述几何方式1，有曲线的参数方程.
  如: 单位圆的参数方程是：$\begin{cases} x=\cos u \\ y=\sin u \end{cases}, (0\le u<2\pi)$
- 代数方式2：对应上述几何方式2，有曲线的一般方程
  如: 单位圆的一般方程是：$x^2+y^2=1$

问题：如何在$\mathbb{R}^3$中建立曲面和曲线？上法是否可以推广？

类似地，我们在空间中建立一个曲面

- 方式1：几何上看，曲(直)线按某一特定规律运动的轨迹.
  代数上看，对应了两个参数的参数方程.
- 方式2：几何上看，满足某一特定条件的点集.
  代数上看，曲面的一般方程.
- 如果空间中曲面 S 上每个点 (x, y, z) 满足关系式 $f(x, y, z)=0$，而且满足这个关系式的点 (x, y, z) 都在曲面 S 上，则称 $f(x, y, z)=0$ 是曲面 S 的方程.
- 一般我们只考虑$f(x, y, z)$ 为多项式的情况，当$f(x, y, z)$的次数为d 时，我们称S为d次曲面.

(思考: d=1时，对应何种曲面？当d增大时，S有何变化？)

1. 球面方程

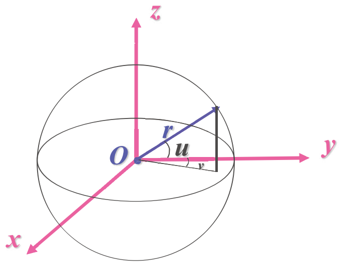
球心: $O(x_0, y_0, z_0)$, **半径**: r

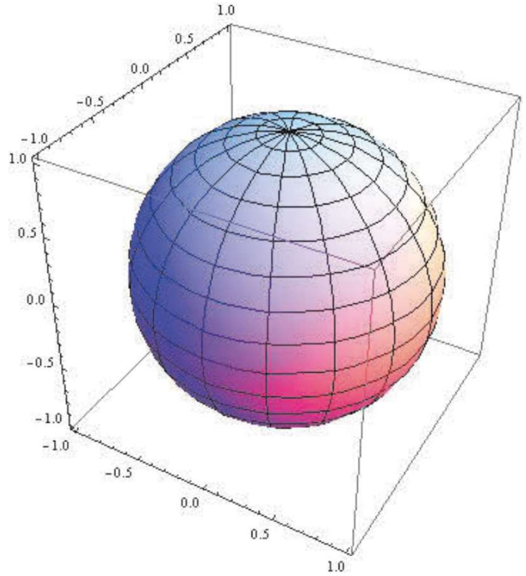
球面方程: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$

展开整理可得空间**球面方程的特征**: 平方项系数相等, 无交叉项. 用配方法可以证明, 二次方程 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d = 0$ 表示球面, 或一个点, (或虚球面).

球面参数方程:

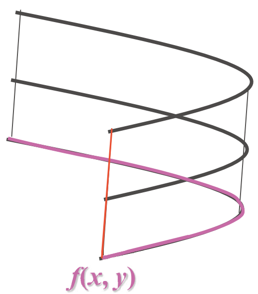
$$\begin{cases} x = r\cos u \sin v \\ y = r\cos u \cos v, \quad u \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], v \in [0, 2\pi]. \\ z = r\sin u \end{cases}$$





2. 柱面方程

- 在一个平面上取定一条曲线, 过曲线上的所有点且垂直于该平面的直线所形成的曲面称为一个**柱面**. 该曲线称为柱的**准线**, 这些直线都称为柱面的**母线**.
- 如果准线在Oxy坐标平面上的方程为 $f(x, y) = 0$,
- 则该方程在空间就表示母线平行于 z 轴以 $f(x, y) = 0$ 为准线的一个**柱面**.

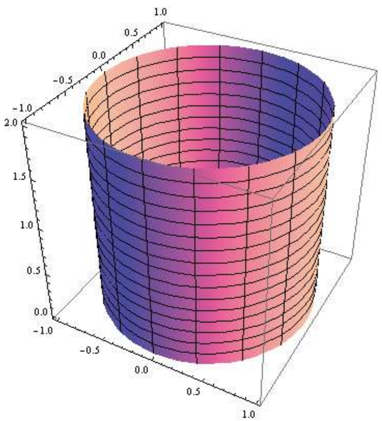


- **园柱面一般方程:**

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- **园柱面参数方程:**

$$\begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\sin u, u \in [0, 2\pi], v \in R. \\ z = v \end{cases}$$

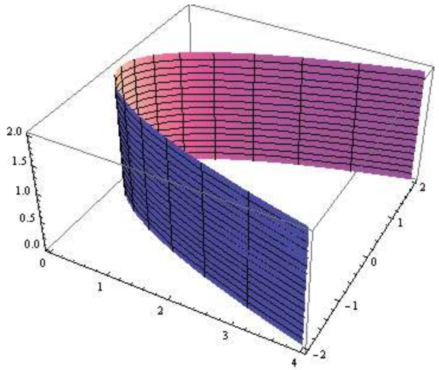


● 抛物柱面一般方程:

$$x = \frac{a}{b^2} y^2$$

● 抛物柱面参数方程:

$$\begin{cases} x = au^2 \\ y = bu \\ z = v \end{cases}, u \in (e, f), v \in R.$$



3. 旋转曲面方程

● 设 Oxy 平面内有一段曲线 C: $f(x, y) = 0$，$y \ge 0$

将 C 绕 x 轴旋转一周，所得到的曲面叫**旋转面**.

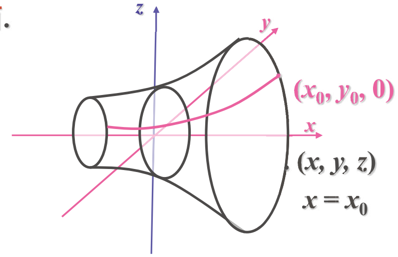
● 该旋转面的方程为:

设S上点$P(x,y,z)$是经曲线C上点$(x_0, y_0, 0)$

旋转而得到的，则 $\begin{cases} x = x_0 \\ \sqrt{y^2 + z^2} = y_0 \end{cases}$

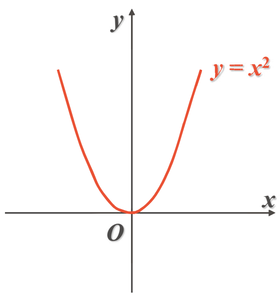
于是P满足的方程为： $f\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0.$

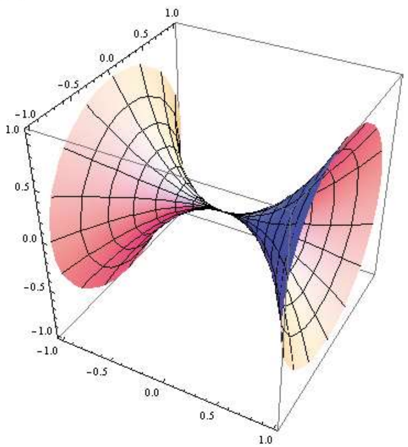
以x轴为旋转轴



● 例如 $y = x^2, y \ge 0$，绕 x 轴旋转一周，所得到的曲面的方程为:

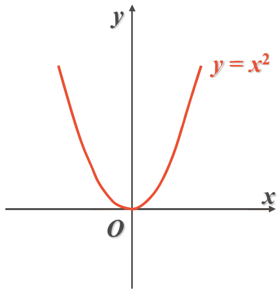
$$\sqrt{y^2 + z^2} = x^2 \Rightarrow y^2 + z^2 = x^4.$$

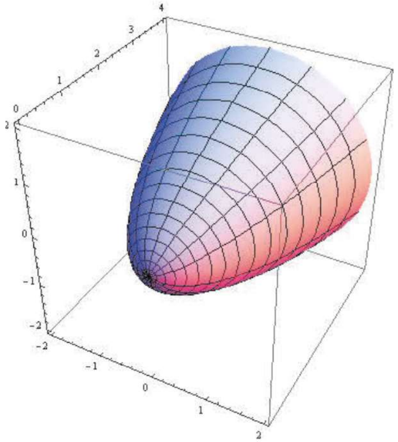




● 而 $y = x^2, y \ge 0$，绕 y 轴旋转一周，所得到的曲面的方程为:

$$y = x^2 + z^2.$$





二、常见的二次曲面及其标准方程

设$f(x, y, z)$为二次多项式, 称 $f(x, y, z)=0$ 表示的曲面为二次曲面.

目标：以下二次曲面的作图

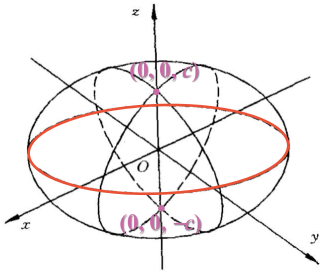
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z.$$

- 要想了解曲面的形状一般采用**平面截割法**. 即用一系列平行于坐标面的平面去截割方程的图形, 得到一些截线. 通过研究这些截线去想象空间的图形.
- 这也是认识空间曲面的通用方法. 我们将一一去用平面截割法去分析每种曲面的几何形状.
- 上述六个方程称为"**标准方程**", 我们还将讨论一般的二次曲面如何化简为标准方程 .

1、椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ \ (a,b,c>0)$$



- 用**平面截线法**来作图:

此曲面与平面$z = z_0$的交线为 $C_{z_0}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{z_0^2}{c^2}.\\ z=z_0\end{cases}$

当$|z_0|>c$时，为虚椭圆（$\mathbb{R}^3$中不存在）

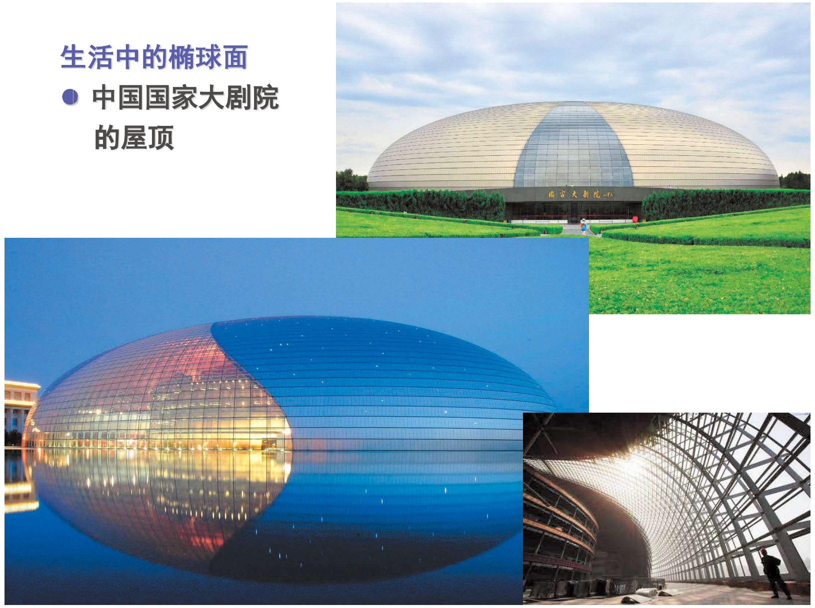
当$|z_0|= c$时，为一个点 $(0, 0, c)$ 或 $(0, 0, -c)$.

当$|z_0|<c$时，为椭圆. 且随z_0的增加，椭圆C_{z_0}先逐渐变大，再逐渐变小；

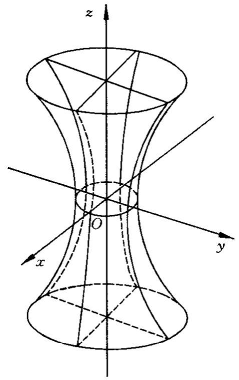
当z_0=0时，在xOy平面上取得最大的椭圆：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, z=0.$

生活中的椭球面

- 中国国家大剧院的屋顶



2、单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ \ (a,b,c>0)$



- 平面$z=z_0$截得曲线为平行于xOy平面的一族椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z_0^2}{c^2}$$

$z_0\to 0, z_0\to\pm\infty$ 时所截曲线如何变化?

- 平面$x=x_0$截得曲线为平行于yOz平面的一族双曲线(含其渐近线)

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x_0^2}{a^2}$$

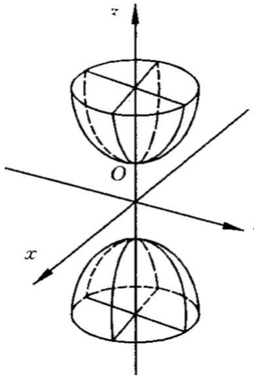
$|x_0|$在$[0,a), a, (a,+\infty)$中变化时，所截曲线如何变化?

- 平面$y=y_0$截得曲线，情形和用x=x_0截类似.

生活中的单叶双曲面

- 腰鼓, 花篮等
- 广州塔(小蛮腰)

3、双叶双曲面 $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a,b,c>0).$



- 用平面$z=z_0$截曲面，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}-1 \quad \Rightarrow |z_0|\ge c.$$

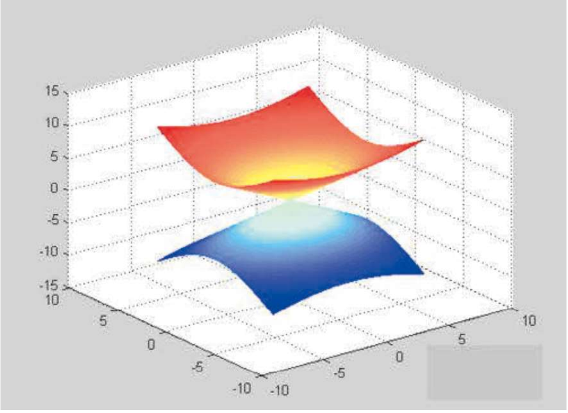
$z_0\to\pm c, z_0\to\pm\infty$时，所截曲线如何变化？

- 用平面$x=x_0$截曲面，得

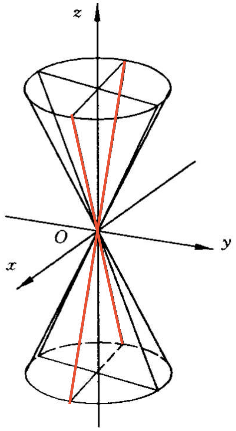
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{x_0^2}{a^2}, \quad x_0\to 0^{\pm}, x_0\to\pm\infty?$$

- 用平面$y=y_0$截曲面，得 $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y_0^2}{b^2}, \quad y_0\to 0^{\pm}, y_0\to\pm\infty?$

Matlab中作图得到的双叶双曲面



4、锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a,b,c>0).$



- 用平面$z=z_0$截曲面，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}, \quad z_0\to 0, z_0\to\pm\infty?$$

- 用平面$x=x_0$截曲面，得

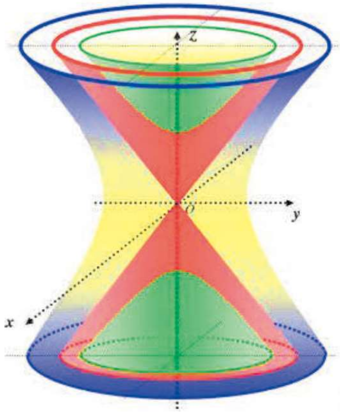
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}, \quad x_0=0? \quad \text{两直线:}\begin{cases}\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}=0\\ x=0\end{cases}.$$

$$|x_0|>0? x_0\to\pm\infty?$$

- 用平面$y=y_0$截曲面，与情形2类似.

双曲面的渐进锥面

- 在平面上, 双曲线有渐近线.
- 相仿, 单叶双曲面与双叶双曲面, 也有渐进面——正是锥面.
- 实际上, 两族a:b:c固定不变的单叶双曲面与双叶双曲面, 有共同的渐进锥面.

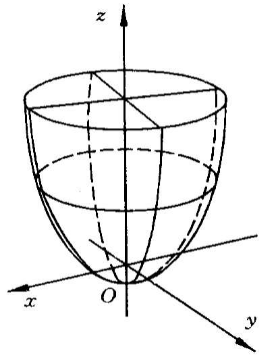


单叶: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

锥面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$

双叶: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

5、椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z \quad (a,b>0).$



- 用平面$z=z_0$截曲面，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z_0, \qquad z_0\to+\infty?$$

- 用平面$x=x_0$截曲面，得 $z=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x_0^2}{a^2}.$

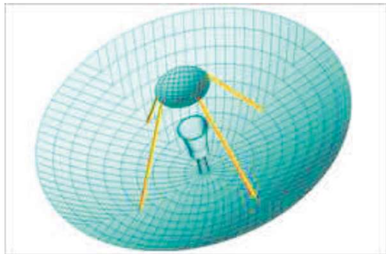
开口向z轴正方向的抛物线，形状固定，顶点变化如何？

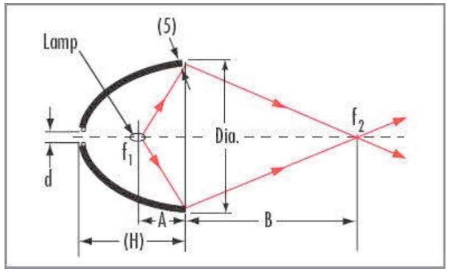
- 用平面$y=y_0$截曲面，得 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}.$

开口向z轴正方向的抛物线，形状固定，顶点变化如何？

生活中的椭圆抛物面

- 雷达, 车灯壁等





6、双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z \quad (a,b>0).$

- 用平面$x=x_0$截曲面，得 $z=-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x_0^2}{a^2},$

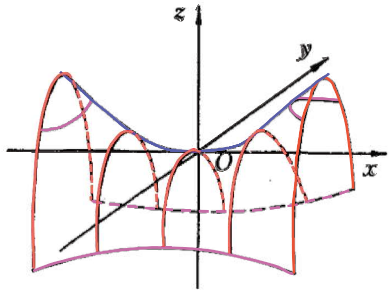
为一族开口向z轴负方向的抛物线(形状、顶点)

- 用平面$y=y_0$截曲面，得 $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2},$

为一族开口向z轴正方向的抛物线(形状、顶点)

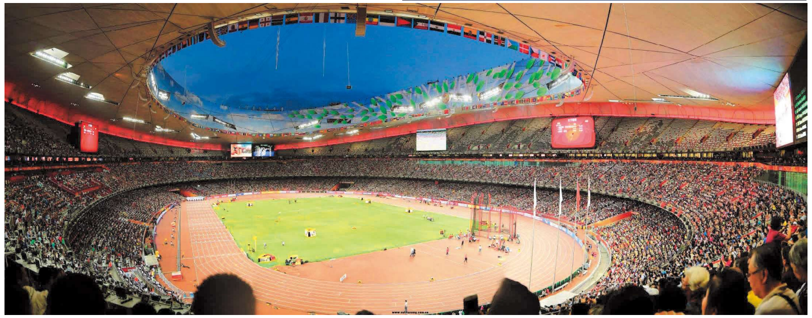
- 用平面$z=z_0$截曲面，得 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z_0,$

为一族双曲线(含渐进线)，$z_0>0$? $z_0<0$? $z_0=0$?



生活中的双曲抛物面

- 马鞍
- 国家体育馆(鸟巢)的顶面

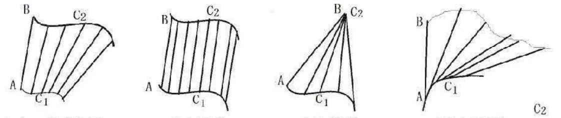


25

7. 直纹面

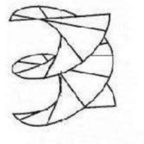
- 有一类曲面, 可由直线的移动来产生, 这类曲面称为**直纹面**.

  例如:



(a) 一般直纹面 (b) 柱面 (c) 锥面 (d) 切线面

同理, 线段的移动也可以产生一些我们生活中常见的曲面, 如:



螺旋面

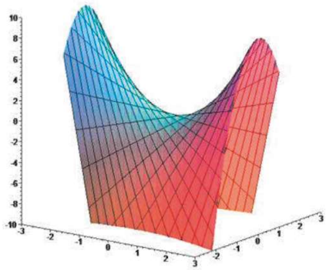
7. 直纹面

- 有一些曲面, 看上去与直线无联系, 但确实是直纹面. 例如:

  单叶双曲面 与 双曲抛物面(马鞍面) 均为直纹面!

验证: 以马鞍面为例, 设其方程为: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z \quad (a,b>0).$

将其改写为: $(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b})(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b})=z.$ 令 $(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b})=\lambda,$



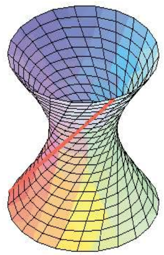
得到直线方程 $\begin{cases}(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b})=\lambda \\ \lambda(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b})=z\end{cases}$

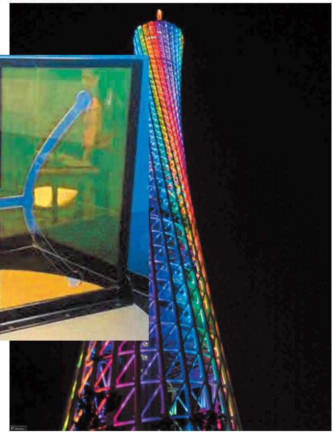
当λ取不同数时, 上式表示一族运动的曲线, 从而产生了马鞍面.

7. 直纹面

- 再来看看**单叶双曲面**

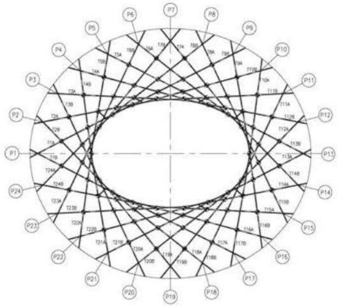
从圆柱面到双曲面

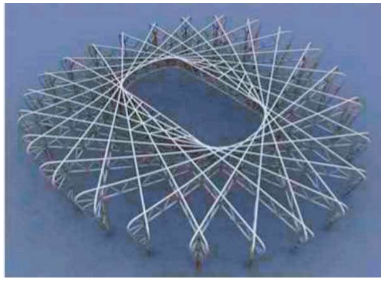




7. 直纹面

- **鸟巢顶面的主结构**: 马鞍面的一部分





三、空间中二次方程(曲面)的化简与分类

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+b_1x+b_2y+b_3z+c=0.$$

$$令\vec{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix},\vec{b}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}.$$

则 $$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}+\vec{b}^{\mathrm{T}}\vec{X}+c=0.$$

问题: $\vec{X}^{T}\boldsymbol{A}\vec{X}+\vec{b}^{\mathrm{T}}\vec{X}+c=0$表示什么样的曲面?

- 是否可以适当的移动坐标系使得方程化简(向已知标准方程靠拢)?
- 坐标系的变换，要求保持曲面的形状。什么样的坐标变换可以保持形状(长度,角度)?
- $\mathbb{R}^3$是欧式空间(默认标准内积)，长度, 角度可由内积定义，何种坐标变换保持内积?

定理 左乘正交阵的矩阵变换保持内积不变，即
$$(\vec{x},\vec{y})=(A\vec{x},A\vec{y})$$

证明：默认标准内积，
$$(A\vec{x},A\vec{y})=\vec{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\vec{y}=\vec{x}^{\mathrm{T}}\vec{y}=(\vec{x},\vec{y})$$ ■

- 正交变换是线性变换，它保持原点不变，且相当于旋转和镜像变换的复合(证明略).
- 还有一类非线性变换：平移变换，也是保持形状不变的。
- 因此，我们可用正交变换+平移变换，来化一般二次曲面的方程为已知的二次曲面的标准方程。

$$\vec{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vec{X}+\vec{b}^{\mathrm{T}}\vec{X}+c=0$$

Step1.去交叉项

存在正交矩阵$\boldsymbol{P}$, s.t. $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3).$

令$\vec{X}=\boldsymbol{P}\vec{Y}$(正交变换),则 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}+c=0.$

记$\vec{Y}=(x_1,y_1,z_1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=(d_1,d_2,d_3)$,则
$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2+d_1x_1+d_2y_1+d_3z_1+c=0.$$

Step2.去1次项

Case1. $\boldsymbol{\lambda_i\neq0, i=1,2,3.}$

令$x_2=x_1+\dfrac{d_1}{2\lambda_1},y_2=y_1+\dfrac{d_2}{2\lambda_2},z_2=z_1+\dfrac{d_3}{2\lambda_3}$(平移),则

$$\lambda_1 x_2^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 z_2^2+e=0,$$

其中$e=c-\dfrac{d_1^2}{4\lambda_1}-\dfrac{d_2^2}{4\lambda_2}-\dfrac{d_3^2}{4\lambda_3}$.

Case2.$\lambda_i\neq 0, i=1,2, \lambda_3=0$.

令$x_2=x_1+\dfrac{d_1}{2\lambda_1}, y_2=y_1+\dfrac{d_2}{2\lambda_2}, z_2=z_1$(平移),则

$$\lambda_1 x_2^2+\lambda_2 y_2^2+d_3 z_2+f=0,$$

其中$f=c-\dfrac{d_1^2}{4\lambda_1}-\dfrac{d_2^2}{4\lambda_2}$.

Case3.$\lambda_1\neq 0, \lambda_2=\lambda_3=0$.

Case4.$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.----不可能

例. 化简二次方程

$$x^2+2y^2+2z^2-4yz-2x+2\sqrt{2}y-6\sqrt{2}z+5=0,$$

并判断它是什么曲面?

解:令$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}$,得$\begin{cases}\lambda_1=1,\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\\ \lambda_2=0,\varepsilon_2=(0,1,1)^T,\\ \lambda_3=4,\varepsilon_3=(0,1,-1)^T.\end{cases}$

令$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,则$Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&0\end{pmatrix}$.

作正交变换$\vec{X}=Q\vec{Y}$,即$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$,则

$$x^2+2y^2+2z^2-4yz-2x+2\sqrt{2}y-6\sqrt{2}z+5=0$$

化为

$$x_1^2+4y_1^2-2x_1+2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}z_1\right)-6\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}z_1\right)+5=0$$

即

$$x_1^2+4y_1^2-2x_1+8y_1-4z_1+5=0$$

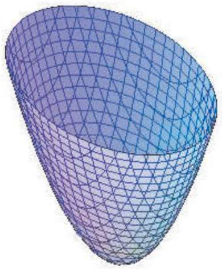
配方得

$$(x_1-1)^2+4(y_1+1)^2-4z_1=0.$$

作平移变换$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-1\\y_1+1\\z_1\end{pmatrix}$,则

$$x_2^2+4y_2^2=4z_2,$$

即$\dfrac{x_2^2}{4}+y_2^2=z_2$,这是一个椭圆抛物面.□



计数小结：

（1）若$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$，且同号，则配方消去一次项后，总可化为

共17种

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, 0 \text{ 或 } -1$$

分别对应椭球、点或虚椭球（在实空间中不存在）. **3种**

（2）若$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$，且异号，则消去一次项后，总可化为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \text{或} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad \text{或} \quad x^2+y^2-z^2=0,$$

分别对应单叶双曲面、双叶双曲面或锥面. **3种**

（3）若$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$中恰有一个为0，另两个同号，则总可化为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz, \quad \text{或} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm 1, \quad \text{或} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,$$

分别对应椭圆抛物面、椭圆柱面、虚椭圆柱面或一条直线. **4种**

（4）若$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$中恰有一个为0，另两个异号，则总可化为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz, \quad \text{或} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{或} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

分别对应马鞍面、双曲线柱面、一对交叉的平面 **3种**

（5）若$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$中恰有两个为0，则适当变换后，总可化为

$$ax^2+cy=0, \quad \text{或} \quad x^2=\pm 1, \quad \text{或} \quad x^2=0,$$

分别对应抛物线柱面、一对平行平面、一对虚平行平面或一对重合平面. **4种**

拓展：利用不变量判断$\mathbb{R}^3$中的二次曲面的类型(总结表)

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+2a_{14}x_1+2a_{24}x_2+2a_{34}x_3+a_{44}=0$$

判别(从左到右)					曲面类型
$I_3 \neq 0$ 有心	$I_2>0$	$I_4<0$			椭球面
		$I_4>0$			虚椭球面
		$I_4=0$			虚锥面(点)
	$I_2 \leqslant 0$	$I_4<0$			单叶双曲面
		$I_4>0$			双叶双曲面
		$I_4=0$			锥面
$I_3=0$ 无心	$I_2>0$	$I_4 \neq 0$			椭圆抛物面
		$I_4=0$	$I_1K_2<0$		椭圆柱面
			$I_1K_2>0$		虚椭圆柱面
			$K_2=0$		一对相交虚平面
	$I_2<0$	$I_4 \neq 0$			双曲抛物面(马鞍面)
		$I_4=0$	$K_2 \neq 0$		双曲柱面
			$K_2=0$		一对相交平面
	$I_2=0$	$I_4=0$	$K_2 \neq 0$		抛物柱面
			$K_2=0$	$K_1<0$	一对平行平面
				$K_1>0$	一对平行虚平面
				$K_1=0$	一对重合平面

$$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

$$I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det \boldsymbol{A} \qquad I_4=\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & a_{44} \end{pmatrix}$$

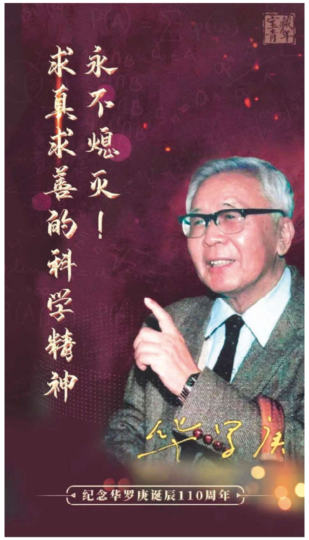
$$K_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

增广阵含a_{44}的3阶主子式之和

$$K_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

增广阵含a_{44}的2阶主子式之和

详细参见：《大学数学:代数与几何(第2版)》，萧树铁，高等教育出版社，2003年



代数 vs 几何

数缺形时少直观，
形少数时难入微，
数形结合百般好，
隔离分家万事休。