复习 & 衔接
微课程

《向量的几何属性》

§3 行列式的几何意义

2022年
2月

杨晶 主讲

内容提要

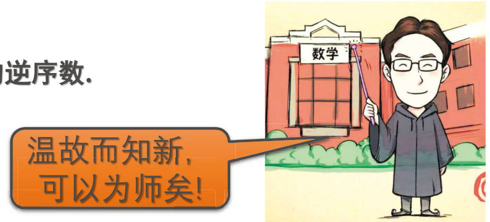
- 二阶、三阶行列式的几何意义
- n 阶行列式的几何意义
- 行列式与矩阵变换

回顾: 行列式的概念

- 行列式来源于求解线性方程组, 是一种代数的简记方式.
- 行列式的定义如下:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中, $\tau(p_1p_2\ldots p_n)$表示排列$p_1p_2\ldots p_n$的逆序数.



回顾: 行列式性质

1、转置不变（行列等价）
2、逐行(列)保加法（拆项法则）
3、逐行(列)保数乘（行列倍乘）
4、交错性（对换取反）
5、倍加不变性
6、行列展开公式

推论1	零行(列)得零
推论2	同行(列)化零
推论3	同比化零

- 实际上, 行列式是一类以n个n维(列)向量为自变量的交错的多线性函数,
  $\det(A)=\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n)$.

回顾：n 阶行列式的定义（用性质）

- 设方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的列分别为$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$, 即$A=(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n)$.
- I_n为n阶单位阵, 即$I_n=\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{pmatrix}$.
- 定义n阶行列式为关于A的一个实值函数$\det=|\cdot|$: {n阶方阵}$\to\mathbb{R}$, 且满足

1.(单位归一) $|I_n|=\det(I_n)=1$;

2.(加法拆项) $\det(\vec{\alpha}_1,\cdots\vec{\alpha}_i+\vec{\alpha}_i',\cdots,\vec{\alpha}_n)=\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_n)+\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i',\cdots,\vec{\alpha}_n)$;

3.(倍乘可提出) $\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,k\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_n)=k\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_n)$;

4 .(对换取反) $\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_j,\cdots,\vec{\alpha}_n)=-\det(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_j,\cdots,\vec{\alpha}_i,\cdots,\vec{\alpha}_n)$.

行列式相关的问题与思考:

- 行列式的代数定义式很“不自然”，总是让初学者摸不着头脑. 但它与矩阵与线性方程组相互融合得又那么“自然”. 这说明它们之间一定存在着更深层次的内在联系. 这种联系是什么?
- 二阶, 三阶行列式是简单形象的; 而二维, 三维空间是我们最熟悉的几何空间. 那么, 二阶, 三阶行列式在二维, 三维空间中有何几何意义?
- 高阶行列式计算比较复杂, 但有很多性质和规律; 高维空间的几何描述, 对我们来说更是有本质上的困难. 那么, 是否可以用一般行列的各种性质, 反映了高维空间中的什么几何涵义呢?
- 行列式只能对方阵定义, 是否可以推广到非方阵? 或更广的形式?

引入问题

问题1: 方阵相关的概念与理论, 如何推广到一般的矩阵?

方阵A
- 行列式 $\det A$
- 求逆 A^{-1}
- 特征值 $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$
- 对角化 $P^{-1}AP=\Lambda$
- 标准化 $P^{-1}AP=J$

推广 →

一般矩阵 $A_{m\times n}$
- $\sqrt{\det(A^{\mathrm{T}}A)}$
- 广义逆
- 奇异值与奇异向量
- 奇异值分解$U^{\mathrm{T}}AV=\Sigma$

问题2: 数学课中，符号$|\cdot|$有哪些含义？——绝对值、向量模长、行列式

如何区分这三种含义呢？——通过上下文，确定符号内的对象

数的绝对值$|a|$, 大小 $=\sqrt{a^2}$

向量的模长$|\vec{a}|$, 长度 $=\sqrt{\sum_i a_i^2}=\sqrt{\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}}$

方阵的行列式$|A|$. 某种度量? 与$A^{\mathrm{T}}A$有关?

一、2阶、3阶行列式的几何意义

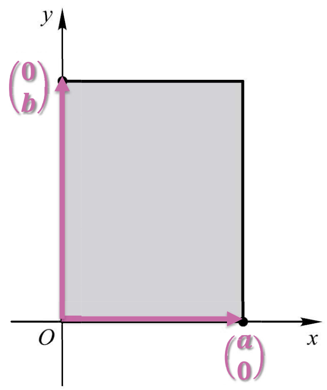
首先, 考虑一类特殊情况: 对2阶角行列式情形

对于对角行列式$D=\begin{vmatrix}a&0\\0&b\end{vmatrix}=\det\left(\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}\right)=ab$.

平面上, 以$\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$为邻边, 可生成一个矩形. 易知, 该矩形的面积为: $|a\cdot b|$.

综上，得

$$\left|\det\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\right|=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}与\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}生成的矩形面积.$$



其次, 考虑**一般2阶行列式情形.**

设$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. 设$A$的两列分别为$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

- 当$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$线性无关时, 以$\vec{\alpha}_1$与$\vec{\alpha}_2$为邻边, 可生成一个平行四边形.
- 当$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$线性相关时, $\vec{\alpha}_1$与$\vec{\alpha}_2$共线, 它们生成的平行四边形退化成线段或原点.

若A不为对角阵, 只需要证明$A=(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2)$能变换成一个对角矩阵. 该变换既不改变对应平行四边形的面积, 又不改变$|\det A|$.

初等变换！！！

- **倍乘**变换 —— 一般会改变$|\det A|$.
- **对换**变换 —— **不改变$|\det A|$.**
- **倍加**变换 —— **不改变$|\det A|$.**

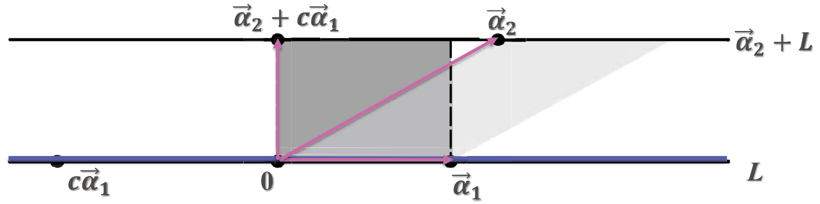
对换, 倍加是否会改变对应平行四边形的面积?

引理 设非零向量$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in \mathbb{R}^2$, 则对任意实数$c$, 由$\vec{\alpha}_1$与$\vec{\alpha}_2$所确定的平行四边形的面积等于由$\vec{\alpha}_1$与$\vec{\alpha}_2+c\vec{\alpha}_1$所确定的平行四边形的面积.

证明: 若$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$线性相关, 则$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$与$\vec{\alpha}_2+c\vec{\alpha}_1$共线, 上述两个平行四边形均退化为面积为0的情况. 结论成立.

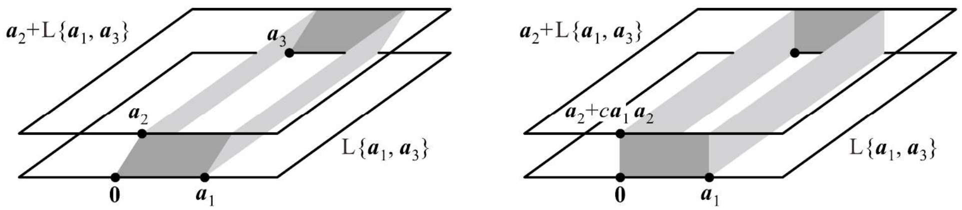
下设$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$线性无关, 令$\vec{\alpha}_1$所在的直线为$L=\{c\vec{\alpha}_1 \mid c\in\mathbb{R}\}$, 则$\vec{\alpha}_2+L=\{\vec{\alpha}_2+c\vec{\alpha}_1 \mid c\in\mathbb{R}\}$为通过$\vec{\alpha}_2$顶点且平行于$L$的直线. 由于$\vec{\alpha}_2$与$\vec{\alpha}_2+c\vec{\alpha}_1$的顶点到直线$L$有相同的垂直距离, 则两个平行四边形有相同的底边、相同的高, 故两个平行四边形面积相同.

特别地, 可取恰当的c使得, $\vec{\alpha}_1$与$\vec{\alpha}_2+c\vec{\alpha}_1$垂直, 从而确定一个矩形. ■



类似地, 考虑三维$\mathbb{R}^3$的情况:

- 对3阶对角阵$A=\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$, 有$|\det A|=|abc|=A$的三列生成的长方体体积.
- 对任意的3阶矩阵A, 可用不改变$|\det A|$的列变换化为对角阵, 且如下图说明: 这些列变换不改变A的3列所确定的平行六面体的体积.



(a) (b)

定理1

(i) 设A为二阶方阵, 则由A的两列所确定的平行四边形的面积为$|\det A|$.

(ii) 设A为三阶方阵, 则由A的三列所确定的平行六面体的体积为$|\det A|$.

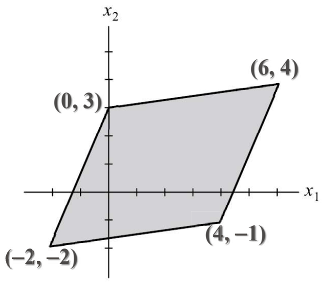
注: 实际上, 利用$\mathbb{R}^3$中向量的外积定义与混合积的运算(本微课第2节), 也可证明定理1. 如: 设三个非零向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$为棱生成的平行六面体, 则它的体积为:

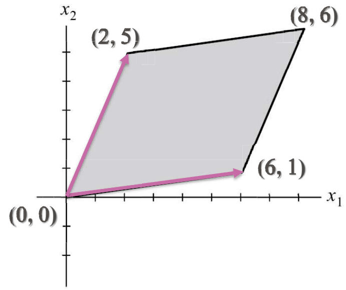
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}\right|.$$

其中, $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)^T, \vec{b}=(b_x, b_y, b_z)^T, \vec{c}=(c_x, c_y, c_z)^T$.

例1. 计算由点$(-2,-2)$, $(0,3)$, $(6,4)$ 和 $(4,-1)$所确定的平行四边形的面积.

解. 先将此平行四边形平移到使原点作为其一顶点的情形, 如图.





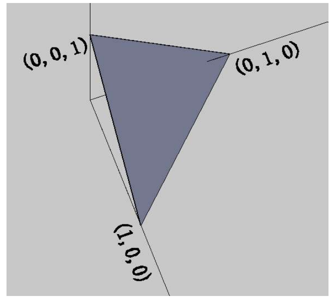
平移后的平行四边形由矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 5 & 1\end{pmatrix}$的列所确定, 于是所求平行四边形的面积为: $|\det A|=|-28|=28$.

课堂练习

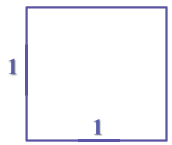
例1. 计算平面$\mathbb{R}^2$上, 由点$A(-1,0)$, $B(0,3)$, $C(5,2)$ 所确定的三角形的面积.

解： 计算$\overrightarrow{AB}=(1,3)$, $\overrightarrow{AC}=(6,2)$, 则行列式$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 6\\ 3 & 2\end{vmatrix}=8$，即得三角形ABC面积为8.

例2. 计算三维空间$\mathbb{R}^3$中, 由点(1,0,0), (0,1,0)与(0,0,1) 所确定的三角形的面积.



思路：用向量的叉乘计算. 思考是否有更直接的方式?



思考题：

在三维空间$\mathbb{R}^3$中，一个边长为1的正方形：

- 若用1维的度量（长度）来看，大小为____∞____；
- 若用2维的度量（面积）来看，大小为____1____；
- 若用3维的度量（体积）来看，大小为____0____.

二、一般行列式的几何意义

下面, 我们将行列式的几何意义推广到一般情形.

例如: 在$\mathbb{R}^3$中， 只有**一个向量**时, 就考虑其**长度**;

有**两个向量**时, 就考虑它们张成的平行四边形的**面积**;

有**三个向量**时, 就考虑它们张成的平行六面体的**体积**.

——这里的“度量”与向量的个数有关.

…… ……

以此类推, 我们可定义$\mathbb{R}^n$中m ($m\le n$)个向量所张成的体积, 即所谓**$\mathbb{R}^n$中的m维体积**.

由于在高维空间中, 很难做出几何图形, 故我们用代数式递推的方式做推广.

定义 $\mathbb{R}^n$中的m个列向量$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$, 它们所张成的$m$维体积$V_m(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m)$, 按如下方式归纳地定义:

$$V_1^2(\vec{\alpha}_1)=|\vec{\alpha}_1|^2;$$

$$V_k^2(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_k)=\left|\vec{\beta}_k\right|^2\cdot V_{k-1}^2(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_{k-1}),\quad k=2,3,\dots,m.$$

其中, $\vec{\beta}_k \coloneqq \vec{\alpha}_k-\sum_{j=1}^{k-1}\lambda_j\vec{\alpha}_j$, 这里$\lambda_j$待定, 使满足

$$\vec{\beta}_k \perp L(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_{k-1}).$$

注: 上述定义中, 满足条件的λ_j $(1\le j\le k-1)$ 一定存在. 因为, 由$\vec{\alpha}_i^T\vec{\beta}_k=0$ $(i=1,2,\dots,k-1)$, 代入$\vec{\beta}_k$的定义式, 得关于$\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}$的线性方程组:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{k-1}\lambda_j\vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_j=\vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_k\\ \cdots\cdots\cdots\\ \sum_{j=1}^{k-1}\lambda_j\vec{\alpha}_{k-1}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_j=\vec{\alpha}_{k-1}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_k\end{cases}\Rightarrow\ A_{k-1}^{\mathrm{T}}A_{k-1}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_{k-1}\end{pmatrix}=A_{k-1}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_k.$$

这是一个“法方程”必有解.(参见最小二乘法)

记 $A_{k-1}=(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_{k-1})$

定理2. 设$\mathbb{R}^n$中m个列向量$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$线性无关, 而矩阵$A_{n\times m}=(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m)$, 则

$$V_m^2(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m)=\det\left(A^TA\right).$$

特别地, 当$n=m$时, 有$V_n^2(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n)=|A|^2$, 正是定理1在$n$维的推广.

当$n=m=1$时, 有 $V_1^2(a)=|a|^2$.

当$m=1$时, 有$V_1^2(\vec{\alpha}_1)=|\vec{\alpha}_1|^2$.

证明: 对m作数学归纳法.

当$m=1$时, 按定义成立.

设$m-1$时, 结论成立, 即 $\det\left(A_{m-1}^TA_{m-1}\right)=V_{m-1}^2(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_{m-1})$.

则考虑m的情形:

$$\left|A^TA\right|=\begin{vmatrix}\vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_m\\ \vdots & & \vdots\\ \vec{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_m\end{vmatrix}$$

代入$\vec{\alpha}_m=\vec{\beta}_m+\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\vec{\alpha}_j$, 得

$$\left|A^TA\right|=\begin{vmatrix}\vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\left(\vec{\beta}_m+\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\vec{\alpha}_j\right)\\ \vdots & & \vdots\\ \left(\vec{\beta}_m+\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\vec{\alpha}_j\right)^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_1 & \cdots & \left(\vec{\beta}_m+\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\vec{\alpha}_j\right)^{\mathrm{T}}\left(\vec{\beta}_m+\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\vec{\alpha}_j\right)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_{m-1} & \sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\vec{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \boxed{\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\vec{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_1} & \cdots & \boxed{\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\vec{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_{m-1}} & \left|\vec{\beta}_m\right|^2+\boxed{\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\vec{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_i}\end{vmatrix}$$

把第1行乘$(-\lambda_1)$, …,第$m-1$行乘$(-\lambda_{m-1})$后加到最后一行, 再按第m行展开, 得

$$\left|A^TA\right|=\left|\vec{\beta}_m\right|^2\begin{vmatrix}\vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_{m-1}\\ \vdots & & \vdots\\ \vec{\alpha}_{m-1}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_1 & \cdots & \vec{\alpha}_{m-1}^{\mathrm{T}}\vec{\alpha}_{m-1}\end{vmatrix}=\left|\vec{\beta}_m\right|^2\cdot V_{m-1}^2(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_{m-1})$$

$$=V_m^2(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m).\ \blacksquare$$

例2(续). 计算三维空间$\mathbb{R}^3$中, 由点(1,0,0), (0,1,0)与(0,0,1) 所确定的三角形的面积.

分析: 三维空间中求2维体积(面积), 用定理2即可.

解: 先将此三角形平移到使原点作为其一顶点的情形,

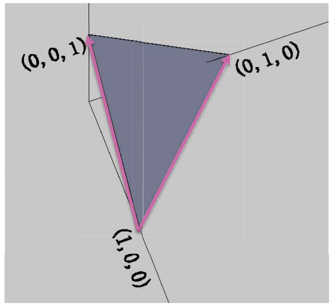
得到两个3维列向量, $\vec{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\vec{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

令$A=(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2)$, 并计算

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

则 所求三角形面积为

$$\frac{1}{2}\sqrt{\det(A^{\mathrm{T}}A)}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



三、矩阵变换与行列式

行列式不仅与几何体的大小有关,还可用于描述矩阵变换的一个重要的几何性质.

设φ_A是由左乘方阵A所对应的矩阵变换，即将n维列向量$\vec{x}$，映为$A\vec{x}$，S是φ_A定义集内的一个集合, $\varphi_A(S)$表示S中点(向量)的像集.

问题: 集合S的大小(面积, 体积)与$\varphi_A(S)$的大小(面积, 体积)相比, 有什么变化?

对于二维, 三维的情况, 若S是平行四边形或平行六面体, 则我们有如下结论.

定理3. (i) 设φ_A: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$是由2阶方阵$A$所确定的矩阵变换, S是$\mathbb{R}^2$中一个平行四边形, 则 $\varphi_A(S)$的面积 = $|\det A| \cdot$ (S的面积).

(ii) 设φ_A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$是由3阶方阵$A$所确定的矩阵变换, S是$\mathbb{R}^3$中一个平行六面体, 则 $\varphi_A(S)$的体积 = $|\det A| \cdot$ (S的体积).

证明: (i). 适当平移后, 不妨设S为一个顶点在$\mathbb{R}^2$中原点的平行四边形. 进一步, 由过原点的两条邻边, 可确定向量$\vec{b}_1, \vec{b}_2$, 则

$$S = \left\{ s_1\vec{b}_1 + s_2\vec{b}_2 \mid 0 \le s_1, s_2 \le 1 \right\}.$$

于是, S在φ_A作用下的像集为:

$$\begin{aligned}\varphi_A(S) &= \left\{ \varphi_A(s_1\vec{b}_1 + s_2\vec{b}_2) \mid 0 \le s_1, s_2 \le 1 \right\} \\ &= \left\{ s_1A\vec{b}_1 + s_2A\vec{b}_2 \mid 0 \le s_1, s_2 \le 1 \right\}.\end{aligned}$$

上式说明, $\varphi_A(S)$是由$A\vec{b}_1, A\vec{b}_2$所确定的平行四边形, 根据定理1, 有

$$\begin{aligned}\varphi_A(S)\text{的面积} &= \left|\det\left(A\vec{b}_1, A\vec{b}_2\right)\right| = \left|\det\left(A\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2\right)\right)\right| \\ &= |\det(A)| \cdot \left|\det\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2\right)\right| = |\det(A)| \cdot \{S\text{的面积}\}.\end{aligned}$$

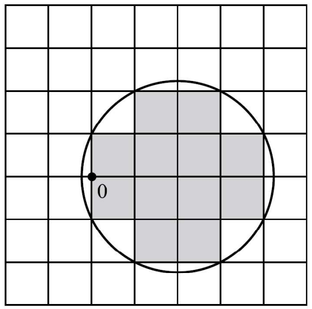
综上, 对$\mathbb{R}^2$中的平行四边形, 行列式$|\det(A)|$表示矩阵变换φ_A作用下面积的放缩比例.

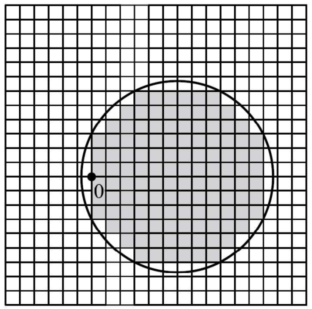
(ii). 类似地, 也可证明三维的情况也成立. ■

下面, 我们把定理3的结论, 推广到S不是平面中直线或3维空间中平面所围成的区域的情形.

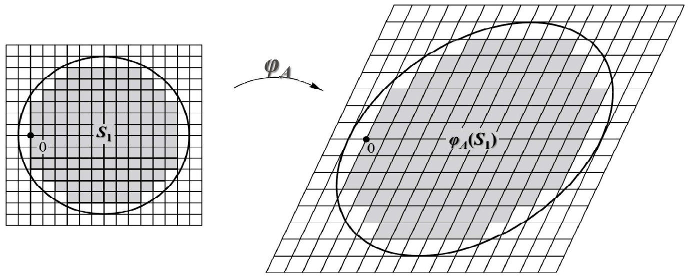
计算一般图形的面积或体积, 是微积分中讨论的问题, 也即利用微元法的思想.

在二维平面上, 若S是一个有限面积的区域, 则S可由其内部的小正方形方格来近似, 当这些小正方形充分小时, S的面积可由这些小正方形的面积之和无限地逼近.





若φ_A: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$是由2阶方阵$A$所确定的矩阵变换, 则$S$在$\varphi_A$作用下的像由$S$中小正方形的像来近似. 若$S_1$是$S$中这些小正方形的并集, 则根据定理2, $\varphi_A(S_1)$的面积就是$|\det A| \cdot \{S_1$的面积$\}$. 此时, $\varphi_A(S_1)$的面积也就可逼近$\varphi_A(S)$的面积.



定理4. 定理3中的结论对二维, 三维中任意有限面积(体积)的区域S均成立.

例3. 若已知圆的面积公式为πr^2, 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$围成区域的面积.

解. 令$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, 则$\varphi_A$表示平面上的伸缩变换. 于是椭圆$E$正是单位圆盘$D$在$\varphi_A$作用下的像. 故

$$椭圆E的面积 = |\det A|\cdot\{单位圆盘面积\} = ab\cdot 1^2\cdot\pi = ab\pi.$$

例4. 重新证明引理, 即: 由$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2\}$确定的平行四边形面积等于由$\{\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2+c\vec{\alpha}_1\}$确定的平行四边形面积.

证明: 设$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, φ_C为对应的**错切变换**, 则有 $\varphi_C\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \vec{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \vec{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+c\vec{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$.

由$\det C=1$知, φ_C不改变平行四边形的面积. ■

注: 类似地, **对换变换**不改变几何体的面(体)积大小, 但改变面积的"定向".

正交变换不改变几何体的面(体)积大小.

本讲小结

- **二阶、三阶行列式的几何意义**

A的两(三)列所确定的平行四边形(平行六面体)的面积(体积)为$|\det A|$

- **n 阶行列式的几何意义**

$\mathbb{R}^n$中的m维体积的平方 $V_m^2(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_m)=\det(A^TA)$

- **行列式与矩阵变换**

$\varphi_A(S)$的面积(体积) $=|\det A|\cdot\{S$的面积(体积)$\}$