复习 & 衔接
微课程

2022年
2月

《向量的几何属性》

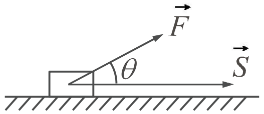
§2 几何向量积 & 空间中线面的位置距离关系

杨晶 主讲

内容提要

一、向量的数量积(内积, 点积)

- 向量的线性运算（加法，数乘）可以用来解决向量的位置关系.
- 要利用向量解决更复杂的几何问题，需要引入向量的其它运算，这其中最重要的就是数量积和向量积.
- 向量的加法是从物理中力的合力抽象出来的. 向量的数量积也可以从物理中力作功的计算公式抽象出来.
- 物理学中力做功的问题：



$$W = |\vec{F}||\vec{S}|\cos\theta$$

1. 数量积的定义与性质

与 $\cos<\vec{\alpha},\vec{\beta}>$ 有关问题可转为内积问题

定义1. 向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 的**数量积**定义为:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} := (\vec{\alpha},\vec{\beta}) = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos\theta,$$

其中 $\theta = <\vec{\alpha},\vec{\beta}>$ 表示向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 间的**夹角**.

- **数量积**又称为**点积**(dot product)或**内积**(inner product).
- 内积 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ 有以下重要性质:

(1) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ (对称性)

证明课下补齐

(2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$ (分配律)

(3) $(k\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot(k\vec{\beta}) = k(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ (数乘)

(4) $\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} \geq 0$ 且等号成立 $\Leftrightarrow \vec{\alpha} = 0$. (正定性)

2. 利用坐标计算内积

设 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 是一个空间仿射坐标系，记

$$\vec{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3,\quad \vec{\beta}=(y_1,y_2,y_3)=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3$$

利用内积的性质，有

$$\begin{aligned}(\vec{\alpha},\vec{\beta})&=(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3,y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3)\\&=x_1y_1\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+x_1y_2\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+x_1y_3\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3+x_2y_1\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+x_2y_2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2+x_2y_3\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3\\&\quad+x_3y_1\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1+x_3y_2\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2+x_3y_3\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3\\&=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}y_1\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+y_2\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+y_3\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3\\y_1\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2+y_3\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3\\y_1\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1+y_2\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2+y_3\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3\end{bmatrix}=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1&\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2&\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3\\\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1&\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2&\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3\\\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1&\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2&\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(\vec{\alpha},\vec{\beta})=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1&\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2&\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3\\\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1&\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2&\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3\\\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1&\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2&\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

其中 $A=\begin{bmatrix}\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1&\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2&\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3\\\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1&\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2&\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3\\\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1&\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2&\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3\end{bmatrix}$ 称为仿射坐标系的度量矩阵. 记:

$\vec{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\vec{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$, 则 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{X}^{\mathrm{T}}A\vec{Y}$

- 直角坐标系 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 下形式更简单, 有$A=I_3$，则

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{X}^{\mathrm{T}}\vec{Y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

3. 内积的应用 —— 表示度量

(1) $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}\quad(=\sqrt{\vec{\alpha}^2})$ 利用内积求长度.

(2) $\cos\theta=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}\quad(=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\sqrt{\vec{\alpha}^2}\sqrt{\vec{\beta}^2}})$ 利用内积求夹角.

(3) $\vec{\alpha},\vec{\beta}$垂直, 即$<\vec{\alpha},\vec{\beta}>=\dfrac{\pi}{2}$, 记为 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$. $\boxed{\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0.}$ 利用内积表正交.

(4) $\vec{\alpha}_{\vec{\beta}}:=|\vec{\alpha}|\cos<\vec{\alpha},\vec{\beta}>\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}\vec{\beta}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}_0)\vec{\beta}_0$ 利用内积表正交投影.

- 在直角坐标系 $\{O; i, j, k\}$ 下的计算公式：

设两向量$\vec{\alpha}=(x_1,x_2,x_3),\vec{\beta}=(y_1,y_2,y_3)$，则

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\qquad \cos\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$$

例1 证明 Cauchy-Schwarz不等式：

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

证明 在直角坐标系 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 中令 $\vec{\alpha}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},\vec{\beta}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$,

$$\Rightarrow\ |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}||\cos<\vec{\alpha},\vec{\beta}>|\le|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|,$$

$$\Rightarrow\ |a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2},$$

$$\Rightarrow\ (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

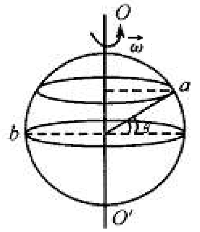
■

二、向量的向量积(外积, 叉积)

● **物理背景**：

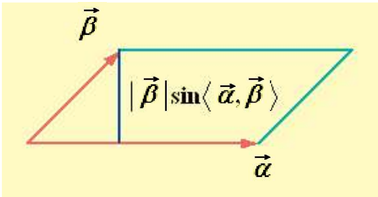
某些物理量，是两个向量的运算结果后得到一个新的向量(既有大小又有方向),

如右图，通过角速度求线速度问题，需要引入新的向量运算，来表示这些物理现象.



● **几何背景**：

平行四边形的面积问题



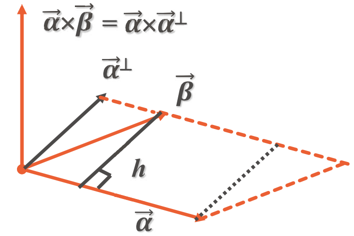
1、向量积（外积）的定义

定义2. 两个向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 的向量积 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 是一个向量，它的方向与 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 垂直，而且 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 符合右手系，长度为

$$|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sin<\vec{\alpha},\vec{\beta}>,$$

恰为以向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 为边的平行四边形的面积.

与$\sin<\vec{\alpha},\vec{\beta}>$有关问题可转为外积问题；特别地 $\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}=\vec{0}$



● 向量积(vector product)也称为外积(outer product)or叉积(cross product).

2、向量积（外积）的性质

(1) $\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = -\vec{\beta}\times\vec{\alpha}$, (对换取反)

(2) $(k\vec{\alpha})\times\vec{\beta} = \vec{\alpha}\times(k\vec{\beta}) = k(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})$, (倍乘可提出)

(3) $\vec{\alpha}\times(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\times\vec{\beta}+\vec{\alpha}\times\vec{\gamma}$. (分配律)

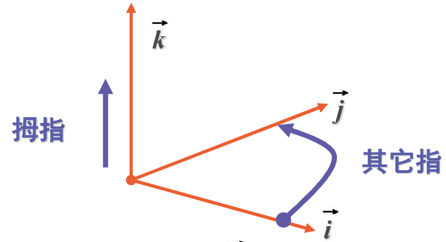
3、向量积（外积）的应用

- 求平行四边形(三角形)的面积;
- 提供与给定两个向量(给定平面)垂直的向量.
- 计算向量的夹角正弦值
- 求点到直线的距离
- 可判断向量平行(共线): $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{0}$.

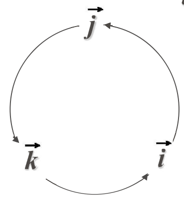
4、向量积（外积）的坐标表示法

● 从理论上而言，直角坐标系与仿射坐标系没有什么区别，但是许多计算和讨论在右手直角坐标系 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ 下形式更简单. 具体如下：

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$



● 我们可借助右边的图来记忆上面的三个式子：当两个向量的向量积的次序与图中箭头所示的次序一致(相反)时，向量积就是箭头所指的第三个坐标向量(反向量).



● 于是在右手直角坐标系下，我们有：

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\Rightarrow\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

● 若 $\vec{\alpha}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k},\vec{\beta}=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}$，则

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\times\vec{\beta}&=(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})\times(y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k})\\&=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{i}+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

● 为便于记忆, 可借用行列式符号来表示:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\times\vec{\beta}&=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{i}+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}\\&=\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}x_3&x_1\\y_3&y_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

例3 请利用外积证明：$\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow$ 对应坐标分量成比例.

证明 两个向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 共线 $\Leftrightarrow\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{0}$，记 $\vec{\alpha}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k},\vec{\beta}=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}$，

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\times\vec{\beta}&=(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})\times(y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k})\\&=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{i}+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow x_2y_3-x_3y_2=x_3y_1-x_1y_3=x_1y_2-x_2y_1=0$$

$$\Leftrightarrow x_1:y_1=x_2:y_2=x_3:y_3.$$

■

(三) 向量的混合积

1. 混合积的定义与性质

● 三个向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 的**混合积** 是一个**数**

$$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$$

● 混合积性质:

(1) $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=(\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\alpha})=(\vec{\gamma},\vec{\alpha},\vec{\beta})$, (轮换不变)

(2) $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=-(\vec{\beta},\vec{\alpha},\vec{\gamma})$, (对换变号)

(3) $(k\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=(\vec{\alpha},k\vec{\beta},\vec{\gamma})=(\vec{\alpha},\vec{\beta},k\vec{\gamma})=k(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$,(倍乘可提出)

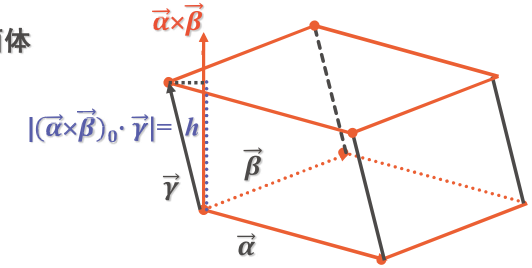
(4) $(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\beta},\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}_1,\vec{\beta},\vec{\gamma})+(\vec{\alpha}_2,\vec{\beta},\vec{\gamma})$. (加法拆项)

注： (3)与(4)为线性性质，这些性质可以利用内积和外积的性质来加以证明.

2、混合积几何意义

➤ 以 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 为棱的平行六面体的**有向体积** $=(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$.

➤ **有向**：符合右手系时，体积为正，否则为负.



➤ 混合积应用:

$$\boxed{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\text{ 共面}\Leftrightarrow(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=0.}$$

3、 混合积的坐标计算公式及其应用

- **在右手直角坐标系$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$下混合积的计算:**

$$\vec{\alpha}=(x_1,x_2,x_3),\vec{\beta}=(y_1,y_2,y_3),\vec{\gamma}=(z_1,z_2,z_3)$$

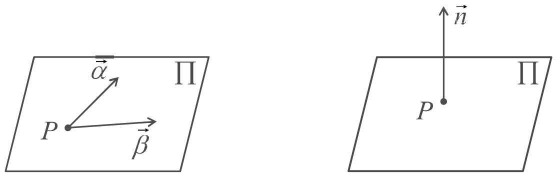
$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\vec{k},$$

$$(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}z_1-\begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}z_2+\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}z_3=\begin{vmatrix}z_1 & z_2 & z_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$$

- **故有判则:** $\boxed{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\text{ 共面}\Leftrightarrow(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0.}$

四、$\mathbb{R}^3$中平面的方程与位置关系

Question: 如何确定一个平面?



Case1. 仿射坐标系$\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$下,点$P(x_0,y_0,z_0)$与不共线的两个向量$\vec{\alpha}=(x_1,y_1,z_1),\vec{\beta}=(x_2,y_2,z_2)$确定平面$\Pi$.

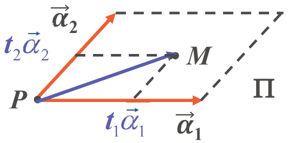
Case2. 直角坐标系$\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$下,平面上一点$P(x_0,y_0,z_0)$及平面的法向量$\vec{n}=(a,b,c)$确定平面$\Pi$.

1. 平面的方程

- **Case1(点向式): 平面 Π 方程: 设M是空间中任一点,**

$M\in\Pi\Leftrightarrow\overrightarrow{PM},\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$共面

$\Leftrightarrow\overrightarrow{PM}=t_1\vec{\alpha}_1+t_2\vec{\alpha}_2.$



- **在直角坐标系 $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$下, 设$P(x_0,y_0,z_0)$,**

$M(x,y,z)$, $\vec{\alpha}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{\alpha}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

$\overrightarrow{PM}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$,

- **则** $M(x,y,z)\in\Pi\Leftrightarrow\overrightarrow{PM},\vec{\alpha},\vec{\beta}$共面 $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0$

按第一行展开,得到一个三元一次方程:

$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$ 平面的一般方程

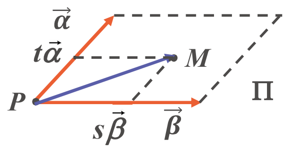
其中, $A=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}, B=-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}, C=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}, D=-\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$

注: 由于 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$不平行, A,B,C 不全为零.

- **再回到初始模型** $M(x,y,z)\in\Pi\Leftrightarrow PM,\vec{\alpha},\vec{\beta}$共面 $\Leftrightarrow\overrightarrow{PM}=t\vec{\alpha}+s\vec{\beta}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_0+tx_1+sx_2,\\ y=y_0+ty_1+sy_2,\\ z=z_0+tz_1+sz_2.\end{cases}$$

平面的参数方程即是点向式方法



例3 讨论平面 $x+y+z=1$可由什么点和向量按点向式生成.

解 将方程的第一个系数非零的未知量取作**主未知量**, 其余的未知量取为**自由未知量**, 自由未知量任取参数,

$y=k_1, z=k_2$, 其中 k_1, k_2 为任意常数, 代入方程组, 可

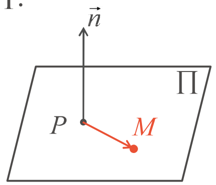
得到原方程组的全部解为:

$$x=1-k_1-k_2, y=k_1, z=k_2. \ (k_1, k_2\text{为任意常数})$$

$$\therefore (x,y,z)=(1,0,0)+k_1(1,-1,0)+k_2(1,0,-1)$$

所以该线性方程组的解集为过点 (1, 0, 0) 且与两个不共线向量 $\vec{\alpha}_1=(1,-1,0), \vec{\alpha}_2=(1,0,-1)$ 平行的平面.

Case2(点法式). 直角坐标系下, 平面上一点 $P(x_0, y_0, z_0)$及平面的法向量$\vec{n}=(a,b,c)$确定平面$\prod$.



$$M(x,y,z)\in\prod$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}\perp\vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}=0$$

$$\Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Remark: 直角坐标系下, 如果平面$\prod$的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

则$\prod$的法向量为$\vec{n}=(A,B,C), D=-ax_0-by_0-cz_0$.

问题: 直角坐标系中, 若平面的一般方程中出现系数为零时, 平面有何特征?

$A=0\Leftrightarrow \vec{n}//YOZ$平面 $\Leftrightarrow \Pi//x$轴	$A=B=0\Leftrightarrow ?$
$B=0\Leftrightarrow \vec{n}//XOZ$平面 $\Leftrightarrow \Pi//y$轴	$B=C=0\Leftrightarrow ?$
$C=0\Leftrightarrow \vec{n}//XOY$平面 $\Leftrightarrow \Pi//z$轴	$A=C=0\Leftrightarrow ?$

问题: $-D/A, -D/B$和$-D/C$的几何意义是什么?

回答: 坐标轴的**截距**.

问题: 如何计算三点决定的平面方程?

例4 求包含 $P(1,2,3), Q(-1,4,2), R(0,1,-1)$ 的平面的方程.

解法一(点向式) $\vec{\alpha}_1=\overrightarrow{PQ}=(-2,2,-1), \vec{\alpha}_2=\overrightarrow{PR}=(-1,-1,-4)$,

Π: 过点 P, Q, R, 即过点 P 且与两个不共线向量 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 平行的平面.

故平面方程满足:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

化简得:

$$9x+7y-4z-11=0.$$

解法二(点法式): $\vec{\alpha}_1=\overrightarrow{PQ}=(-2,2,-1),\vec{\alpha}_2=\overrightarrow{PR}=(-1,-1,-4)$,

则平面Π的法方向为:

$$\vec{\alpha}_1\times\vec{\alpha}_2=\left(\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_3 & x_1\\ y_3 & y_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -4 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\right)=(-9,-7,4)$$

代入点法式方程, 得:

$$-9(x-1)-7(y-2)+4(z-3)=0$$

$$\Rightarrow\quad -9x-7y+4z+11=0.$$

解法三(待定系数法) 设所求平面为 $Ax+By+Cz+D=0$，将 P,Q,R 点的坐标代入，得线性方程组

$$\begin{cases}A+2B+3C+D=0\\ -A+4B+2C+D=0\\ B-C+D=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&1\\-1&4&2&1\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&6&5&2\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&1&-1&1\\0&6&5&2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&1&-1&1\\0&0&11&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&23/11\\0&1&0&7/11\\0&0&1&-4/11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-9/11\\0&1&0&7/11\\0&0&1&-4/11\end{bmatrix}$$

不妨取 $D=-11$，得 $C=-4, B=7, A=9$，故所求平面的方程为 $9x+7y-4z-11=0$.

2、平面的位置关系

$\mathbb{R}^3$中的两张平面：

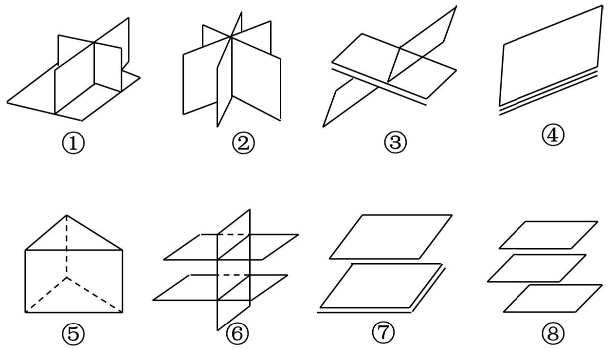
$$(*)\begin{cases}\Pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \Pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\qquad \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\ \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2).$$

几何上	代数上	$\vec{n}_1,\vec{n}_2$	方程组(*)
相交	$\Leftrightarrow A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$	$\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$	无穷多解
平行	$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$	$\vec{n}_1 // \vec{n}_2$	无解
重合	$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$	$\vec{n}_1 // \vec{n}_2$	无穷多解

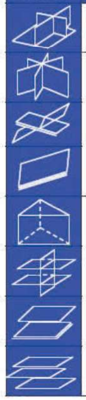
注意： 上述连比中总认为0/0可为任意值。

- **三个平面的位置关系：**

几何上：



代数上：如何判断这八种位置关系？

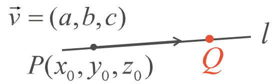


几何情形	方程组的解数	解的集合	等价代数条件	
	有唯一解	一点	$r(A)=r(\bar{A})=3$	
	有无穷多解	一直线	$r(A)=r(\bar{A})=2$	$\{\vec{\alpha}_i\}$(或$\{\vec{\beta}_i\}$)两两线性无关
				$\{\vec{\alpha}_i\}$(或$\{\vec{\beta}_i\}$)中有两线性相关
		一平面	$r(A)=r(\bar{A})=1$	
	无解	空集	$r(A)=2$, $r(\bar{A})=3$	$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$两两线性无关
				$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$中有两线性相关
			$r(A)=1$, $r(\bar{A})=2$	$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$中有两线性相关
				$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$两两线性无关

其中，A与$\bar{A}$为对应方程组的系数矩阵与增广矩阵，$\vec{\alpha}_i$与$\vec{\beta}_i$为A与$\bar{A}$的三个行.

五、$\mathbb{R}^3$中直线的方程与位置关系

1. 直线的方程: 如何确定一条直线?



Case1.点向式（仿射坐标系）

$$Q(x,y,z)\in l \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}\,//\,\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}=t\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \;\underset{\text{添加参数}}{\overset{\text{消参}}{\rightleftarrows}}\; \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

直线的标准方程

直线的参数方程
1维本反映质

$$l:\ \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

问题 方向向量 (a,b,c) 中出现0怎么办? 几何意义如何?

回答1: 0/0 = 任何值

回答2:

- 一个分量为零，如：$a=0 \Leftrightarrow$ 直线落在$x=x_0$平面（与x轴正交）
- 两个分量为零，如：$a=b=0 \Leftrightarrow$ 直线平行于$\vec{e}_3$ (z轴)
- 三个分量为零, 不可能!!!
- 没有分量为零，直线 l 与三个坐标轴均不平行和正交.

- **Case2(交线式)**：直线也可看成是两个不平行平面的交线，因而

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

如何体现“不平行”？

表示一条直线，称为直线的一般方程.

例8 用点向式描述下述方程给出的直线: $\begin{cases} y+z+1=0, \\ y-z-1=0. \end{cases}$ (一般方程)

解: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-1 \end{cases}$ 所求的交线的方程为 $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{(z+1)}{0}$,

为一条过 $(0,0,-1)$ 点平行于 x 轴的直线. (标准方程)

(参数方程)

2、直线与平面的位置关系

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 平面Π（法向$\vec{n}$）

$\Longrightarrow$ 直线l（方向$\vec{v}$）

直线与平面	上式方程组	$\vec{v}$与$\vec{n}$
相交	$\Leftrightarrow$唯一解	$\vec{v}\not\perp\vec{n}$
平行	$\Leftrightarrow$无解	$\vec{v}\perp\vec{n}$
重合	$\Leftrightarrow$无穷解	$\vec{v}\perp\vec{n}$

例5 已知平面 $\pi: x-y-z-4=0$，直线 $L: x-1=1-y=\dfrac{z+3}{2}$，

则下列结论中正确的是：

A. 直线 L 与平面 π 相交.

$\boxed{\text{B.}}$ 直线 L 与平面 π 平行.

C. 直线 L 与平面 π 垂直.

D. 直线 L 在平面 π 内.

3、两直线的位置关系

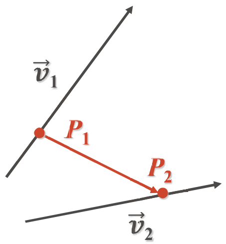
- 两条直线可能的位置关系：$\begin{cases} 共面 \begin{cases} 相交 \\ 平行 \\ 重合 \end{cases} \\ 异面 \end{cases}$

如何判别给定直线的位置关系？

- 设两条直线 l_1, l_2 方程如下：

$l_1: \dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1}$， $\vec{v}_1=(X_1,Y_1,Z_1)$ $P_1(x_1,y_1,z_1)$，

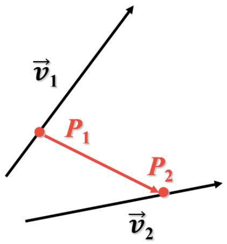
$l_2: \dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}$ $\vec{v}_2=(X_2,Y_2,Z_2)$ $P_2(x_2,y_2,z_2)$.



- 通过分析向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1P_2}$ 的位置关系，可以得到两直线间的位置关系.

- 通过分析向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1P_2}$ 的位置关系，可以得到两直线间的位置关系.

直线l_1,l_2	代数条件1	代数条件2	代数条件3
相交	$(\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2)=0$	$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$	
平行	$(\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2)=0$	$\vec{v}_1 // \vec{v}_2$	$\vec{v}_1 // \vec{v}_2 \nparallel \overrightarrow{P_1P_2}$
重合	$(\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2)=0$	$\vec{v}_1 // \vec{v}_2$	$\vec{v}_1 // \vec{v}_2 // \overrightarrow{P_1P_2}$
异面	$(\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2)\neq 0$		



例6 判断 m 为何值时下面两直线相交:

$$l_1:\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4},\quad l_2:\frac{x-3}{m}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}.$$

解: $P_1(-2,0,1), P_2=(3,1,7)\ \ \overrightarrow{P_1P_2}=(5,1,6),\ \ \vec v_1=(2,-3,4), \vec v_2=(m,4,2).$

若两直线相交，有

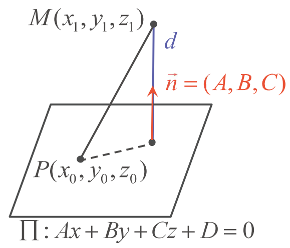
$$(\overrightarrow{P_1P_2},\vec v_1,\vec v_2)=\begin{vmatrix}5 & 1 & 6\\ 2 & -3 & 4\\ m & 4 & 2\end{vmatrix}=0,$$

由此解出 $m=3$.

显然 v_1 不平行于 v_2，故 $m=3$ 时，两直线相交.

六、直角坐标系下的距离

1、点到平面的距离



$$\overrightarrow{PM}\bullet\vec n=|\overrightarrow{PM}||\vec n|\cos\langle\overrightarrow{PM},\vec n\rangle,$$

$$d=|\overrightarrow{PM}|\,|\cos\langle\overrightarrow{PM},\vec n\rangle|$$

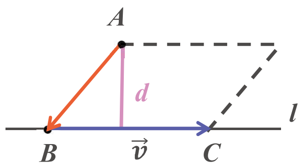
$$\Rightarrow d=\frac{|\overrightarrow{PM}\bullet\vec n|}{|\vec n|}=|\overrightarrow{PM}\bullet\vec n_0|$$

直角坐标系下， $\overrightarrow{PM}\bullet\vec n=A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)=Ax_1+By_1+Cz_1+D$

故，点$M(x_1,y_1,z_1)$到平面$\prod: Ax+By+Cz+D=0$的距离为

$$\boxed{d=\frac{|\overrightarrow{PM}\bullet\vec n|}{|\vec n|}=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.}$$

2、点到直线的距离



● 求 A 点到直线 l 的距离 d，可在 l 上任取一点 B 构造向量 $\overrightarrow{AB}$，再取 l 的方向向量 $\vec v=\overrightarrow{BC}$，

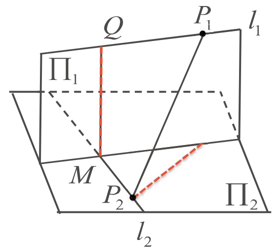
那么，$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|$ 表示以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ 为边的平行四边形面积，于是

$$\boxed{d=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\vec v|}{|\vec v|}=\left|\overrightarrow{AB}\times\frac{\vec v}{|\vec v|}\right|=|\overrightarrow{AB}\times\vec v_0|.}$$

例7 求点 $A(2,-3,-1)$ 到直线 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$ 的距离.

解: $d=\frac{|(1,-2,-1)\times(-2,-1,1)|}{|(-2,-1,1)|}=\frac{|(-3,1,-5)|}{|(-2,-1,1)|}=\frac{\sqrt{210}}{6}.$

3、异面直线间的距离



● 假定有两条异面直线 l_1, l_2，它们的方向向量为 $\vec v_1, \vec v_2$ (必不平行)，而 P_1, P_2 分别在两条直线上，两条直线 l_1, l_2 之间的距离为 $d=|\overrightarrow{QM}|$

故d为$\overrightarrow{P_1P_2}$向$\vec v_1\times\vec v_2$的正交投影，即

$$\boxed{d=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\frac{\vec v_1\times\vec v_2}{|\vec v_1\times\vec v_2|}\right|=\frac{|(\vec v_1,\vec v_2,\overrightarrow{P_1P_2})|}{|\vec v_1\times\vec v_2|}.}$$

上述距离也可以理解为：由向量$\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec v_1$, $\vec v_2$组成的平行六面体的高.

例8 **求下面两条异面直线的距离：**

$$l_1:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}, \qquad l_2:\ x-1=y+1=z-2.$$

解： $\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}, P_1=(0,0,0), P_2=(1,-1,2),$

$$\Rightarrow \quad d=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\frac{\vec{v}_1\times\vec{v}_2}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}\right|=\left|\frac{\sqrt{6}}{6}(-1-2-2)\right|=\frac{5\sqrt{6}}{6}.$$