第四次习题课解答：Taylor 展式、极值问题

1． 将函数 $\ln(1+x+y+z)$ 在点 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 分别展开成带 Peano 余项的二阶泰勒展式和带有 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式。

解：将函数 $\ln(1+x+y+z)$ 中的 $x+y+z$ 看作一个整体，并记作 $u=x+y+z$.

将一元函数 $\ln(1+u)$ 在 $u=0$ 处展开成带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式:

$$\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2).$$

将 $u=x+y+z$ 代入到上式即得

$$\ln(1+x+y+z)=(x+y+z)-\frac{1}{2}(x+y+z)^2+o(\rho^2).$$

上式即为所求的带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式。这里 $\rho^2=x^2+y^2+z^2$. 注意

$o((x+y+z)^2)=o(\rho^2)$.

为了求带 Lagrange 余项的 Taylor 展式，我们需要求函数的 Hesse 矩阵。

为此，我们将函数 $\ln(1+x+y+z)$ 看作函数 $\ln(1+u)$ 和函数 $u=x+y+z$ 的复合函数。

于是 $\mathrm{grad}(\ln(1+x+y+z))=\dfrac{1}{1+u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

由此进一步得 $\ln(1+x+y+z)$ 的 Hesse 矩阵为 $H(x,y,z)=\dfrac{-1}{(1+u)^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

于是所求的带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式为

$$\ln(1+x+y+z)=(x+y+z)-\frac{1}{2}(x,y,z)H(\theta x,\theta y,\theta z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=$$

$$=(x+y+z)-\frac{1}{2}\frac{(x+y+z)^2}{[1+\theta(x+y+z)]^2}.\text{（*）}$$

这里 $\theta\in(0,1)$.

这是课本 p.82，1（3），课本所给出的答案为 $\ln(1+x+y+z)=(x+y+z)-\dfrac{1}{2}(\xi+\eta+\varsigma)^2$.（**）

关于不确定的量 ξ，η，ς，课本没有给出说明。如果在展式（*）中，令

$\xi=\dfrac{x}{\sqrt{1+\theta^2(x+y+z)^2}}$，$\eta=\dfrac{y}{\sqrt{1+\theta^2(x+y+z)^2}}$，$\varsigma=\dfrac{z}{\sqrt{1+\theta^2(x+y+z)^2}}$，

即得展式（**）。展式（*）比（**）更精确，更好一些。解答完毕。

2. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为凸的有界闭区域，$f(x,y)\in C^1(D)$．试证：$f(x,y)$ 在区域 D 上满足 Lipschitz 条件，即 $\exists L>0,\ s.t.\ \forall P_1,P_2\in D$，有 $|f(P_2)-f(P_1)|\le L\|P_2-P_1\|$（两点之间的距离）。

证明：因为 $f(x,y)\in C^1(D)$，而有界闭区域上的连续函数是有界的，

因此存在 $M>0$ 使得 $|f_x'(x,y)|\le M,\ |f_y'(x,y)|\le M,\ \forall(x,y)\in D.$

由 D 是凸的（即 D 中任意两点的凸组合在 D 中），

因此 $\forall\lambda\in[0,1],\ \forall P,\ Q\in D,\ \lambda P+(1-\lambda)Q\in D.$

由泰勒公式（或微分中值公式），对任意的 $P_1(x_1,y_1),\ P_2(x_2,y_2)\in D$，

存在 $P^*\in\overline{P_1P_2}\subset D$ 使得

$$
\begin{aligned}
|f(P_2)-f(P_1)|&=|f_x'(P^*)(x_2-x_1)+f_y'(P^*)(y_2-y_1)|\le M(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|)\\
&\le\sqrt{2}M\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{2}M\|P_1-P_2\|.
\end{aligned}
$$

证毕。

3. 设 $f(x,y)\in C^2$．证明：$\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(2h,e^{-\frac{1}{2h}})-2f(h,e^{-\frac{1}{h}})+f(0,0)}{h^2}$.

证明：将函数在点 $(0,0)$ 处展开为带有拉格朗日余项的一阶泰勒展式，有

$$f(2h,e^{-\frac{1}{2h}})=f(0,0)+f_x'(0,0)2h+f_y'(0,0)e^{-\frac{1}{2h}}+\frac{1}{2}[4h^2f_{xx}''(\xi,\eta)+4he^{-\frac{1}{2h}}f_{xy}''(\xi,\eta)+e^{-\frac{1}{h}}f_{yy}''(\xi,\eta)],$$

$$f(h,e^{-\frac{1}{h}})=f(0,0)+f_x'(0,0)h+f_y'(0,0)e^{-\frac{1}{h}}+\frac{1}{2}[h^2f_{xx}''(\xi',\eta')+2he^{-\frac{1}{h}}f_{xy}''(\xi',\eta')+e^{-\frac{2}{h}}f_{yy}''(\xi',\eta')],$$

其中点 (ξ,η) 位于连接两点 $(0,0)$ 和 $(2h,e^{-\frac{1}{2h}})$ 的线段上，点 (ξ',η') 位于连接两点 $(0,0)$ 和 $(h,e^{-\frac{1}{h}})$ 的线段上。这样

$$\begin{aligned}\frac{f(2h,e^{-\frac{1}{2h}})-2f(h,e^{-\frac{1}{h}})+f(0,0)}{h^2} &= f_x'(0,0)\frac{e^{-\frac{1}{2h}}-2e^{-\frac{1}{h}}}{h^2}+2f''_{xx}(\xi,\eta)-f''_{xx}(\xi',\eta') \\ &\quad+\frac{2(e^{-\frac{1}{2h}}f''_{xy}(\xi,\eta)-e^{-\frac{1}{h}}f''_{xy}(\xi',\eta'))}{h} \\ &\quad+\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{1}{h}}f''_{yy}(\xi,\eta)-2e^{-\frac{2}{h}}f''_{yy}(\xi',\eta')}{h^2}.\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{2h}}}{h^2}=0=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^2}$，且 $\lim\limits_{h\to 0^+}f''_{xx}(\xi,\eta)=f''_{xx}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0^+}f''_{xx}(\xi',\eta')$，

$\lim\limits_{h\to 0^+}f''_{xy}(\xi,\eta)=f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0^+}f''_{xy}(\xi',\eta')$， $\lim\limits_{h\to 0^+}f''_{yy}(\xi,\eta)=f''_{yy}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0^+}f''_{yy}(\xi',\eta')$，

因此 $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(2h,e^{-\frac{1}{2h}})-2f(h,e^{-\frac{1}{h}})+f(0,0)}{h^2}=f''_{xx}(0,0)$. 证毕

4．求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离.

分析：所求问题实际上是当动点落在曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 上时，求函数 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值，因此是条件极值问题。

解法一、将这个条件极值问题转化为无条件极值，即在 $\mathbb{R}^2$ 上求二元函数

$f(x,y)=x^2+y^2+xy+x-y+4$ 的最小值。

解方程组 $\begin{cases}f_x'=0\\ f_y'=0,\end{cases}$ 求得唯一的一组解 $(x,y)=(-1,1)$.

将这组解代入约束条件 $z^2=xy+x-y+4$ 立得 $z=\pm 1$.

因此函数 $f(x,y)$ 在整个平面上有且仅有两个驻点 $(-1,1,1)$ 和 $(-1,1,-1)$.

由于函数 $f(x,y)$ 是二次多项式，

它的 Hesse 矩阵是常数阵 $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ，这是正定矩阵，

因此函数 $f(x,y)$ 在这两个驻点处均取得极小值 3.

由此断言，所求的最短距离为 $\sqrt{3}$. 解答完毕。

解法二、Lagrange 乘子法求解。

令 $L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-x+y-4)$. 解方程组

$$\begin{cases} L'_x = 2x - \lambda(y+1) = 0 \\ L'_y = 2y + \lambda(-x+1) = 0 \\ L'_z = 2z + 2\lambda z = 0 \\ z^2 - xy - x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

由上述第三个方程可知$\lambda = -1$或$z = 0$.

情形（1）. $\lambda = -1$. 联立前两个方程得$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 2y = 1. \end{cases}$

不难解得唯一的解：$x = -1$，$y = 1$.

将$x = -1$，$y = 1$代入第四个方程得$z = \pm 1$.

这就得到问题的两个驻点$(-1,1,1)$和$(-1,1,-1)$.

情形 (2). $z = 0$. 联立前两个方程得 $\begin{cases} 2x - \lambda y = \lambda \\ -\lambda x + 2y = -\lambda. \end{cases}$

故$(2-\lambda)(x+y) = 0$.

(i) 当$\lambda = 2$时，解得$x = y + 1$. 代入方程$xy + x - y + 4 = 0$，得$y^2 + y + 5 = 0$，无实数解。

(ii) 当$\lambda \neq 2$时，则$y = -x$.

代入方程$xy + x - y + 4 = 0$，得$-x^2 + 2x + 4 = 0$. 其解为$x = 1 \pm \sqrt{5}$.

由此得到两个驻点：$(x, y, z) = (1+\sqrt{5},\ -1-\sqrt{5},\ 0)$，$(1-\sqrt{5},\ -1+\sqrt{5},\ 0)$.

综上我们得到四个驻点：$(-1,1,1)$，$(-1,1,-1)$，$(1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}, 0)$，$(1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}, 0)$.

这四个点与原点的距离分别为$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$，$2\sqrt{3+\sqrt{5}}$，$2\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

这四个值的最小值是$\sqrt{3}$.

因此，曲面上的两个点$(-1,1,1)$和$(-1,1,-1)$与原点的距离$\sqrt{3}$是所求的最短距离。解答完毕。

5. 在周长为$2p$的三角形中求出满足下述要求的三角形：绕自己的一边旋转时所形成的旋转体的体积最大。

解：设三角形三边的长分别为x，y，$2p - x - y$.

不妨设绕边长为x的边旋转，并假设该边上的高为h.
则三角形的面积为$S = xh/2$.

另一方面，根据三角形面积的海伦公式知 $S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$.

于是所求旋转体的体积为 $V=V(x,y)=\dfrac{1}{3}\pi h^2 x=\dfrac{4p\pi}{3}(p-x)(p-y)(x+y-p)/x$.

令 $\begin{cases} V_x'=0 \\ V_y'=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (2p-2x-y)x-(p-x)(x+y-p)=0 \\ 2p-x-2y=0, \end{cases}$

解得 $x=\dfrac{p}{2}$，$y=\dfrac{3p}{4}$. 故所求三角形三边的长分别为 $\dfrac{p}{2}$，$\dfrac{3p}{4}$，$\dfrac{3p}{4}$. 解答完毕。

6. 设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面上处处可微，且满足条件

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty. \qquad (*)$$

试证：对于任意给定的向量 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$，均存在一点 $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ 使得 $\mathrm{gradf}(\xi,\eta)=(a,b)$.

证明：根据假设 $(*)$ 可知，对于任意给定的向量 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$，有

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{f(x,y)-ax-by}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty.$$

故当 $x^2+y^2\to+\infty$ 时，函数

$$f_1(x,y)=f(x,y)-ax-by\to+\infty.$$

任取 $P\in\mathbb{R}^2$，令 $f_1(P)=M$. 则 $\exists d>0$ $s.t.$ $\forall(x,y)$，当 $\sqrt{x^2+y^2}>d$ 时，有 $f_1(x,y)>M$.

故存在 $Q\in B=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le d^2\}$ 使得 $f_1(Q)=\min\limits_{(x,y)\in B}f_1(x,y)$. 显然，

$$f_1(Q)=\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}f_1(x,y).$$

故 Q 是 $f_1(x,y)$ 的极小值点，由极值的必要条件知

$$gradf_1(Q)=(0,0).$$

从而 $gradf(Q)=(a,b)$. 证毕

7. 求平面 $x+y-z=0$ 与圆柱面 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0$ 相交所成椭圆的面积。

分析：(1)如果求得椭圆的长、短半轴长分别为 a,b，则椭圆的面积 $S=\pi ab$.

(2) 由圆柱面方程看到，此圆柱关于坐标原点是对称的，故此圆柱的中心轴为通过坐标原点的某一直线.

(3) 因为平面 $x+y-z=0$ 通过坐标原点，所以此平面上的椭圆截线以坐标原点为其中心点。

据此分析，椭圆上任意一点到坐标原点距离的最大、最小值即为所求。

解：令 $L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y-z)-\mu(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1)$，

解方程组 $\begin{cases} L_x^{'}=2x-\lambda-2\mu x+\mu y+\mu z=0 \\ L_y^{'}=2y-\lambda-2\mu y+\mu x+\mu z=0 \\ L_z^{'}=2z+\lambda-2\mu z+\mu y+\mu x=0 \\ x+y-z=0 \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0 \end{cases}$

整理得 $\begin{cases} (2-2\mu)x-\lambda+\mu y+\mu z=0 & (1) \\ (2-2\mu)y-\lambda+\mu x+\mu z=0 & (2) \\ (2-2\mu)z+\lambda+\mu y+\mu x=0 & (3) \\ x+y-z=0 & (4) \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0 & (5) \end{cases}$

将 $(1)x+(2)y+(3)z$，得

$$2(x^2+y^2+z^2)-\lambda(x+y-z)-2\mu(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0,$$

将 $(4),(5)$ 带入上式，得 $x^2+y^2+z^2=\mu$，故 μ 是 $x^2+y^2+z^2$ 的极值，问题转而去求 μ，

为此，从方程 $(1)-(4)$ 中消去 λ，(2)+(3), (1)+(3)与(4)联立，得

$$\begin{cases} 2\mu x+(2-\mu)y+(2-\mu)z=0 \\ (2-\mu)x+2\mu y+(2-\mu)z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

上述方程组有非零解的充要条件是系数矩阵行列数为零，故

$$\begin{vmatrix} 2\mu & 2-\mu & 2-\mu \\ 2-\mu & 2\mu & 2-\mu \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

所以 $\mu^2-\dfrac{20}{3}\mu+4=0$，从而该方程的两个根就是 $x^2+y^2+z^2$ 的极大、极小值，而两根之积为 4，所以椭圆的面积是 2π .

解法二、在上述解法中求得 $x^2+y^2+z^2=\mu$ 之后，为求 μ，将上述方程(1)-(4)看成是关于变量 (x,y,z,λ) 的方程，由于方程(5)表明 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$,因此方程(1)-(4)构成的齐次线性方程组有非零解，故

$$\begin{vmatrix} 2-2\mu & \mu & \mu & -1 \\ \mu & 2-2\mu & \mu & -1 \\ \mu & \mu & 2-2\mu & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

解得 $\mu_1=6,\ \mu_2=\dfrac{2}{3}$，所以椭圆的面积是 2π.

8. 已知曲线 $C:\begin{cases} x^2+2y^2-z=6, \\ 4x+2y+z=30, \end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值。

解:令 $L(x,y,z)=z+\lambda\left(x^2+2y^2-z-6\right)+\mu\left(4x+2y+z-30\right)$. 解方程组

$$\begin{cases} L_x'=2\lambda x+4\mu=0 \\ L_y'=4\lambda y+2\mu=0 \\ L_z'=1-\lambda+\mu=0 \\ x^2+2y^2-z-6=0 \\ 4x+2y+z-30=0 \end{cases}$$

解得 $\mu=-\dfrac{\lambda x}{2}=-2\lambda y$，$1=\lambda-\mu=\lambda(1+2y)$，所以 $\lambda\neq 0$，从而 $x=4y$.

由 $\begin{cases} x-4y=0 \\ x^2+2y^2-z-6=0 \\ 4x+2y+z-30=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x-4y=0 \\ 18y^2-z-6=0, \\ 18y+z-30=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x-4y=0 \\ y^2+y-2=0 \\ 18y+z-30=0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=12 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-8, \\ y=-2, \\ z=66. \end{cases}$ 因此 z 的最大值为 66.

9. 若 $f_{xy}''(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$， $f_x'(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$， $f(0,y)=y^2+2y$. 求 $f(x,y)$ 的极值。

解： 因为 $f_{xy}''(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$，因此

$$\begin{aligned} f_x'(x,y) &= f_x'(x,0)+\int_0^y f_{xy}''(x,v)\mathrm{d}v \\ &=(x+1)\mathrm{e}^x+\int_0^y 2(v+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}v \\ &=(x+1)\mathrm{e}^x+(y^2+2y)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x[x+(y+1)^2], \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,y)+\int_0^x f_x'(u,y)\mathrm{d}u \\ &=y^2+2y+\int_0^x (u\,\mathrm{e}^u+(y+1)^2\,\mathrm{e}^u)\mathrm{d}u \\ &=x\mathrm{e}^x+(y^2+2y)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

所以 $f_y'(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$. 令 $f_y'(x,y)=0$ 解得 $y=-1$，再由 $f_x'(x,y)=0$ 解得 $x=0$. 故唯一的

驻点是$(x,y)=(0,-1)$．由于 $f''_{xx}(0,-1)=2,\ \ f''_{xy}(0,-1)=0,\ \ f''_{yy}(0,-1)=2$，这样

$$f''_{xx}(0,-1)f''_{yy}(0,-1)-(f''_{xy}(0,-1))^2=4>0,\ \ f''_{xx}(0,-1)=2>0\text{，}$$

所以$(0,-1)$是函数的极小值点，且极小值 $f(0,-1)=-1$．

10. 求函数$z=xy(4-x-y)$在由三条直线$x=1$，$y=0$和$x+y=6$所围有界闭区域上的最大值。

解：记由三条直线$x=1$，$y=0$和$x+y=6$所围的有界开区域为D，有界闭区域为$\overline{D}$．

(I)　求函数$z(x,y)$在区域D内的极值．令

$$\begin{cases} z'_x=4y-2xy-y^2=0 \\ z'_y=4x-x^2-2xy=0 \end{cases}$$

求得驻点$(0,0),\ \left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right),\ (0,4),\ (4,0)$，在$D$内的驻点为$\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$．

(II)　求函数$z(x,y)$在边界上的最值。区域D的边界由三条直线段构成。这对应着如下的三个条件极值问题：

(1) 求函数$xy(4-x-y)$在约束条件$x=1$下的极大值；

(2) 求函数$xy(4-x-y)$在约束条件$y=0$下的极大值；

(3) 求函数$xy(4-x-y)$在约束条件$x+y=6$下的极大值。

问题(1)．将$x=1$代入$z=xy(4-x-y)$得一元函数$z=y(3-y)$．令$z'=3-2y=0$，解得驻点$(1,\ 3/2)$．对应函数值为$z=\dfrac{9}{4}$．

问题(2)．将$y=0$代入$z=xy(4-x-y)$，得$z=0$．

问题(3)．作 Lagrange 函数$L=xy(4-x-y)+\lambda(x+y-6)$．令

$$\begin{cases} L'_x=4y-2xy-y^2+\lambda=0 \\ L'_y=4x-x^2-2xy+\lambda=0 \\ x+y-6=0 \end{cases}$$

解这个方程组求得函数在边界$x+y=6$上有驻点$(3,3)$．于是我们得到函数在闭区域$\overline{D}$上有驻点$(4/3,4/3)$，$(1,3/2)$和$(3,\ 3)$．函数也可能在三个角点$(1,0),(6,0),(1,5)$上取得最值。

由于函数 $z=xy(4-x-y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，故函数在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值在这六个点上取得。计算函数在这六个点上的函数值可知，函数 $z(x,y)$ 在点 $(4/3,\ 4/3)$ 处取得最大值 $z(4/3,4/3)=64/27$． 在点 $(3,\ 3)$ 处取得最小值 $z(3,3)=-18$．解答完毕。

11. 设 $S:F(x,y,z)=0$ 是光滑曲面，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 S 外一点。证明：若 $Q\in S$ 使得线段 P_0Q 是 P_0 与曲面 S 上任意一点的连线中最短线段，则向量 $\overrightarrow{P_0Q}$ 必与曲面在该点的切平面垂直。

证明：所求问题就是在曲面上求一点 $Q(x,y,z)\in S$ 使得 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ 的值最小。令

$$L(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-\lambda F(x,y,z),$$

解方程组 $\begin{cases} L'_x=2(x-x_0)-\lambda F'_x=0\\ L'_y=2(y-y_0)-\lambda F'_y=0\\ L'_z=2(z-z_0)-\lambda F'_z=0\\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$

得 $\overrightarrow{P_0Q}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=\dfrac{\lambda}{2}gradF(x,y,z)$，即向量 $\overrightarrow{P_0Q}$ 与曲面 S 在点 $Q(x,y,z)$ 处的法向量平行，所以向量 $\overrightarrow{P_0Q}$ 与曲面 S 在点 $Q(x,y,z)$ 处的切平面垂直。 证毕

====

以下供学有余力的同学选做。

12. 设 $p>0$，$q>0$ 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$．求函数 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x>0,y>0$ 里满足约束条件 $xy=1$ 的最小值。由此进一步证明 Young 不等式 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}\ge xy$，$\forall x,y>0$．

（注：这是课本第一章总复习题第 16 题，page 97）

解：考虑条件极值问题：求目标函数 $\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$ 在约束条件 $xy=1$，$x>0,y>0$ 下的极小值.

作 Lagrange 函数 $L(x,y)=\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}-\lambda(xy-1)$．

解方程组

$$\begin{cases} L_x' = x^{p-1} - \lambda y = 0 \\ L_y' = y^{q-1} - \lambda x = 0 \\ xy - 1 = 0, \end{cases}$$

求得方程组在第一象限 $x>0, y>0$ 有唯一解 $x=1, y=1, \lambda=1$.

当 $x \to 0^+$ 或 $y \to 0^+$ 时，由于函数 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ 在双曲线 $xy=1$ 上的函数值趋于正无穷，因此

函数 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ 在双曲线 $xy=1$ 的最小值点就是 $(1,1)$，故最小值为 1.

下面证明 Young 不等式。

要证 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} \ge xy$，$\forall x, y>0$，即要证 $\frac{1}{p}\frac{x^p}{xy}+\frac{1}{q}\frac{y^q}{xy} \ge 1$. 记 $a=\frac{x}{(xy)^{1/p}}$，$b=\frac{y}{(xy)^{1/q}}$，

则 $ab=\frac{xy}{(xy)^{(1/p)+(1/q)}}=1$. 根据第一部分条件极值的结论得 $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \ge 1$. 此即

$\frac{1}{p}\frac{x^p}{xy}+\frac{1}{q}\frac{y^q}{xy} \ge 1$. 这表明 Young 不等式成立。证毕

Young 不等式传统证明方法：

左边$= e^{\ln\left(\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\right)} \ge e^{\frac{1}{p}\ln x^p+\frac{1}{q}\ln y^q} = xy$（下凸函数性质）

13. 假设 $u(x,y)$ 在闭圆盘 $\bar{D}=\left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\right\}$ 上连续，在开圆盘

$D=\left\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\right\}$ 内二阶连续可微，且满足 Lapalace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$.

若在圆盘边界 $\left\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\right\}$ 上，$u(x,y) \ge 0$，证明：当 $x^2+y^2 \le 1$ 时，$u(x,y) \ge 0$.

（这是课本习题 1.9 第 5 题的第 2 小题， page 94）

证明：根据连续函数在有界闭域上可取到最值可知，函数 $u(x,y)$ 在有界闭域上的某点 $(x_0,y_0) \in \overline{D}$ 上必取得最小值。若最小值非负，则结论得证。假设最小值是负的，即 $u(x_0,y_0)<0$. 由假设知函数在边界 $\left\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\right\}$ 上非负。因此点 (x_0,y_0) 不在边界上，即 (x_0,y_0) 位于开区域 D 内。考虑函数 $u(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的 Hesse 矩阵 $H_u(x_0,y_0)=\left.\begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}$. 记矩阵 $H_u(x_0,y_0)$ 的两个特征值为 λ 和 μ. 则据矩阵特征

值之和等于矩阵的迹，有 $\lambda+\mu=(u''_{xx}+u''_{yy})|_{(x_0,y_0)}$. 由于函数 $u(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极小值，因此它的 Hesse 矩阵 $H_u(x_0,y_0)$ 的两个特征值 λ 和 μ 必定都是非负的，即 $\lambda\ge 0$ 且 $\mu\ge 0$. 因为如果 λ 和 μ 之一为负数，则不难证明 $u(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不可能取得极小值。于是 $(u''_{xx}+u''_{yy})|_{(x_0,y_0)}\ge 0$. 另一方面根据假设，$(u''_{xx}+u''_{yy})|_{(x_0,y_0)}=u(x_0,y_0)<0$. 这就得到了矛盾。证毕

14. 假设 $f(x,y)\in C^1(\mathbf{R}^2)$ 在全平面上除原点之外处处满足 $xf'_x+yf'_y>0$. 证明：原点是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点，并且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证明：

① 首先证明原点之外任意点 (x,y) 都不是驻点，从而不是极值点。

假设点 $(x_0,y_0)\ne(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点，即在该点处 $f'_x=0$，$f'_y=0$. 因此 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿着任何方向的方向导数均为零。另一方面，函数 $f(x,y)$ 沿方向 $l=\dfrac{(x_0,y_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=gradf(x_0,y_0)\cdot\frac{(x_0,y_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{x_0f'_x+y_0f'_y}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}>0\,.$$

矛盾。故原点之外任意点 (x,y) 都不是 $f(x,y)$ 的驻点。

② 下证原点是驻点。

对于任意的 $x>0$，考察点 $(x,0)$. 由题目条件推出 $x\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}>0$，进而得到 $\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}>0$.

令 $x\to0^+$，因为偏导数连续，所以由极限保号性得

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}\ge 0\,.$$

由题目条件又可以推出在点 $(-x,0)$ 满足 $-x\dfrac{\partial f(-x,0)}{\partial x}>0$，故 $\dfrac{\partial f(-x,0)}{\partial x}<0$. 又得到

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\partial f(-x,0)}{\partial x}\le 0\,.$$

这样 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$. 同样的方法可以推出 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$. 因此原点是驻点.

③ 证明 $f(0,0)$ 是极小值。

任取 $(x,y)\neq(0,0)$， 我们证明 $f(x,y)>f(0,0)$，因此 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点。

令 $g(t)=f(tx,ty)$. 易知函数 $g(t)$ 是连续可微的。由一元函数的 Lagrange 中值定理知 $g(1)-g(0)=g'(\xi)$，$\xi\in(0,1)$. 另一方面由复合函数的链式法则，有

$$g'(t)=f_x'(tx,ty)x+f_y'(tx,ty)y.$$

由假设 $xf_x'+yf_y'>0$ 知，$g'(t)=\frac{1}{t}\left(f_x(tx,ty)tx+f_y(tx,ty)ty\right)>0$，$\forall t>0$. 于是

$$f(x,y)-f(0,0)=g(1)-g(0)=g'(\xi)>0.$$

方法二、直接利用二元函数的微分中值公式。

对任意的 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 满足 $(x,y)\neq(0,0)$，存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x,y)-f(0,0)=xf_x'(\theta x,\theta y)+yf_y'(\theta x,\theta y)=\frac{1}{\theta}[\theta xf_x'(\theta x,\theta y)+\theta yf_y'(\theta x,\theta y)]>0,$$

因此 $f(x,y)>f(0,0)$. 故 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点。

④ 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

注意到 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，所以 $f(x,y)$ 可微。由于 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$，因此 $\mathrm{d}f(0,0)=0$. 故函数值增量与微分之差是 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小量，即

$$\lim_{x\to0,y\to0}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$ 证毕

15. 设 $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$. 若 $f(x,y)$ 在任意一点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 处的 Hesse 矩阵均是正定的，则 $f(x,y)$ 至多有一个驻点。

证明：（用反证法）假设 $f(x,y)$ 有两个驻点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$. 则由条件，$f(x,y)$ 在这两个驻点处的 Hesse 矩阵 $H_f(P_1)$ 与 $H_f(P_2)$ 均正定知，$P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 都是函数 $f(x,y)$ 的极小值点。令

$$F(t)=f(tx_1+(1-t)x_2,ty_1+(1-t)y_2).$$

则 $F(t)$ 在 $t=0,1$ 处达到极小值，所以存在 $t_0\in(0,1)$ 使得 $F(t)$ 在 $t_0\in(0,1)$ 达到极大值，故 $F''(t_0)\le 0$. 令 $P_0=(t_0x_1+(1-t_0)x_2, t_0y_1+(1-t_0)y_2)$. 注意到

$$\begin{aligned}F''(t_0)&=f''_{xx}(P_0)(x_1-x_2)^2+2f''_{xy}(P_0)(x_1-x_2)(y_1-y_2)+f''_{yy}(P_0)(y_1-y_2)^2\\&=(x_1-x_2\quad y_1-y_2)\begin{pmatrix}f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0)\\ f''_{xy}(P_0) & f''_{yy}(P_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ y_1-y_2\end{pmatrix}>0,\end{aligned}$$

矛盾。故 $f(x,y)$ 至多有一个驻点。