第 10 次习题课 数项级数 参考解答

1．求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$的和，其中$m$是正整数.

解：因为级数的前N项和为

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m})$$

$$=\frac{1}{m}(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{N})-\frac{1}{m}(\frac{1}{1+m}+\frac{1}{2+m}+\cdots\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{N+m})$$

$$=\frac{1}{m}(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{m}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+1}-\cdots-\frac{1}{N+m}),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m)}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\cdots-\frac{1}{N+m}\right)$$

$$=\frac{1}{m}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}).$$

2．证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛.

证：必要性：因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$存在，所以

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0，且\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_n.$$

充分性：因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}a_k$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n},$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在.

3．设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$．证明：若$l<1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}=+\infty$；若$l>1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$收敛；若$l=1$，举例说明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$可能收敛也可能发散.

证：（1）因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l<1$，所以存在$N_1>0$，当$n>N_1$时，

$$a_n<q_1=\frac{1+l}{2}<1.$$

这时 $\frac{1}{n^{a_n}}>\frac{1}{n^{q_1}}$，且$\sum\limits_{n=N_1+1}^{\infty}\frac{1}{n^{q_1}}=+\infty$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}=+\infty$.

（2）因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l>1$，所以存在$N_2>0$，当$n>N_2$时，

$$a_n > q_2 = \frac{1+l}{2} > 1\,.$$

这时 $0 < \frac{1}{n^{a_n}} < \frac{1}{n^{q_2}}$，且 $\sum\limits_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{1}{n^{q_2}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ 收敛.

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 发散．因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}} = 1$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散；

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}}$ 收敛．因为 $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}} = \frac{1}{n \cdot n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}} = \frac{1}{n\mathrm{e}^{\sqrt{\ln n}}}$，且无穷积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}} \mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}} \mathrm{d}x = \int_{\sqrt{\ln 2}}^{+\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^{x}} \mathrm{d}x \text{ 收敛.}$$

注： 当 $l=1$ 时，也可考虑级数 $\sum \frac{1}{n(\ln n)^q} = \sum \frac{1}{n^{1+\frac{q\ln\ln n}{\ln n}}}$，其敛散性依赖于 q，但 $1+\frac{q\ln\ln n}{\ln n} \to 1$.

4．正项级数判敛

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3+2n-1}$；

解： 发散．因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{n^2-1}{n^3+2n-1} = 1$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi}{2n^2+1})$；

解： 收敛．因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2n^2+1}) = \frac{\pi}{2}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

（3）$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^p}{\ln n}$；

解： 当 $p < -1$ 时，收敛；当 $p \geqslant -1$ 时，发散.

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln(1+\frac{2n}{n^2+1})$；

解： 因为 $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln(1+\frac{2n}{n^2+1}) = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p} \ln(1+\frac{2n}{n^2+1}) \sim \frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}\ (n\to\infty)$，

所以，当 $p > 0$ 时，收敛；当 $p \leqslant 0$ 时，发散.

（5）$\frac{1}{1} + \frac{1\times3}{1\times4} + \frac{1\times3\times5}{1\times4\times7} + \frac{1\times3\times5\times7}{1\times4\times7\times10} + \cdots$；

解： 收敛．因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1$，所以收敛.

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nr^n$，其中 $r > 0$.

解法 1： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n} = r$，所以，当 $r < 1$ 时，收敛；当 $r > 1$ 时，发散；当 $r = 1$

时，通项不趋向于零，发散.

解法 2：当 $r \geqslant 1$ 时，通项不趋向于零，发散；当 $0<r<1$ 时，因为

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot nr^n = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{r^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{-r^{-x}\ln r} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{-r^{-x}\ln^3 r} = 0,$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nr^n$ 收敛.

（7）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$；

解法 1：因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{\ln n} = 0,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 收敛.

解法 2：因为 $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \frac{e^{\ln^2 n}}{e^{n\ln\ln n}} = \frac{1}{e^{n(\ln\ln n\cdot - \frac{\ln^2 n}{n})}}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln\ln n\cdot - \frac{\ln^2 n}{n}) = +\infty$，所以当 n 充分大时，有 $\ln\ln n\cdot - \frac{\ln^2 n}{n} > 2$，从而 $\frac{1}{e^{n\ln n\cdot(1-\frac{\ln n}{n})}} < \frac{1}{e^{2n}}$. 故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 收敛.

（8）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n = +\infty$，所以 n 充分大时 $\ln n > e^2$，$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{(e^2)^{\ln n}} = \frac{1}{n^2}$.

所以级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

（9）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}$ $(a>0)$；

解：$\frac{1}{a^{\ln n}} = \frac{1}{(e^{\ln a})^{\ln n}} = \frac{1}{(e^{\ln n})^{\ln a}} = \frac{1}{n^{\ln a}}$，所以当 $\ln a > 1$ 时，即 $a > e$ 时级数收敛，其他情形发散.

（10）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^p(n^p+1)}$ $(p>0)$；

解：当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛；当 $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ 时，因为

$$\frac{\sin^2 n}{n^p(n^p+1)} = \frac{1-\cos 2n}{2n^p(n^p+1)} = \frac{1}{2n^p(n^p+1)} - \frac{\cos 2n}{2n^p(n^p+1)},$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p(n^p+1)}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n^p(n^p+1)}$ 条件收敛，所以原级数发散.

（11）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{p\ln n}{n})^n$；

解：因为 $(1-\frac{p\ln n}{n})^n=\mathrm{e}^{n\cdot\ln(1-\frac{p\ln n}{n})}=\mathrm{e}^{n(-\frac{p\ln n}{n}+o(\frac{\ln^2 n}{n^2}))}=\frac{1}{n^p}\mathrm{e}^{o(\frac{\ln^2 n}{n})}$，所以 $(1-\frac{p\ln n}{n})^n$ 与 $\frac{1}{n^p}$ 等价.

所以当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{p\ln n}{n})^n$ 收敛，其他情形发散。

（12）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$.

解：发散．因为 $\frac{1}{\ln(n!)}>\frac{1}{n\ln n}$，且 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散.

（13）$1+a+ab+a^2b+a^2b^2+a^3b^2+\cdots+a^nb^n+a^{n+1}b^n+\cdots$， $a>0,b>0$.

解：对原级数加括号得到级数

$$(1+a)+(ab+a^2b)+(a^2b^2+a^3b^2)+\cdots+(a^nb^n+a^{n+1}b^n)+\cdots$$

$$=(1+a)+ab(1+a)+a^2b^2(1+a)+\cdots+a^nb^n(1+a)+\cdots,$$

这是一个几何级数，公比为 ab，所以当 $ab<1$ 时收敛，其他情形发散.

因为正项级数收敛当且仅当它以某种方式加括号后收敛，所以原级数当 $ab<1$ 时收敛，其他情形发散.

5．一般级数的判敛，并指出是否绝对收敛

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$；

解： $p\leqslant 0$ 时发散； $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛； $p>1$ 时绝对收敛.

（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{1+a^n}$；

解：当 $|a|>1$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a^n|}{|1+a^n|}=1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a^n|}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{1+a^n}$ 绝对收敛；

当 $-1<a\leqslant 1$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{1+a^n}\neq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{1+a^n}$ 发散.

（3） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$；

解： $\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}=\frac{1}{\sqrt[100]{n}}-\frac{2}{(n+1)\sqrt[100]{n}}$，由于 Leibniz 形级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)\sqrt[100]{n}}$$

都收敛，所以原级数收敛.

（4） $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\cdots$；

解： $S_{4n}=\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{4k-3}}-\frac{1}{\sqrt{4k-1}}+\frac{1}{\sqrt{4k-2}}-\frac{1}{\sqrt{4k}})$，且

$$\frac{1}{\sqrt{4k-3}}-\frac{1}{\sqrt{4k-1}}+\frac{1}{\sqrt{4k-2}}-\frac{1}{\sqrt{4k}}>0,$$

所以$\{S_{4n}\}$单调递增.

又因为

$$S_{4n}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\cdots$$
$$+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n-2}}-\frac{1}{\sqrt{4n}}$$
$$=1+\frac{1}{\sqrt{2}}-(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}})-(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{6}})-(\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{9}})-\cdots$$
$$-(\frac{1}{\sqrt{4(n-1)-1}}-\frac{1}{\sqrt{4n-3}})-(\frac{1}{\sqrt{4(n-1)}}-\frac{1}{\sqrt{4n-2}})-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{4n}}$$
$$<1+\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_{4n}$存在.

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$可知$\lim\limits_{n\to\infty}S_{4n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{4n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{4n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{4n}$，故级数收敛.

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}$；

解：由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)^p}\cdot\frac{n^p}{a^n}\right|=|a|$，所以

当$|a|>1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}$发散；当$|a|<1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}$绝对收敛；

当$a=1$时，$p>1$收敛，$p\leqslant 1$发散；

当$a=-1$时，$p\leqslant 0$发散，$0<p\leqslant 1$条件收敛，$p>1$绝对收敛.

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$；

解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}\right|=0$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$绝对收敛.

（7）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{n^p\ln n}$.

解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)^p\ln(n+1)}\cdot\frac{n^p\ln n}{a^n}\right|=|a|$，所以

当$|a|>1$时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{n^p\ln n}$发散；

当$|a|<1$时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a^n}{n^p\ln n}$绝对收敛；

当 $a=1$ 时， $p>1$ 收敛， $p\leqslant 1$ 发散；

当 $a=-1$ 时， $p<0$ 发散， $0\leqslant p\leqslant 1$ 条件收敛， $p>1$ 绝对收敛．

（8） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}$

解：当 $p>1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}$ 绝对收敛；

当 $p\leqslant 0$ 时， $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n^p}\neq 0$， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}$ 发散；

当 $0<p\leqslant 1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin n}{n^p}=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^p}\left(\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\right)-\sum_{n=1}^{N-1}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n^p}-\frac{1}{(n+1)^p}\right)-\frac{1}{N^p}\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\right)-\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)((n+1)^p-n^p)}{n^p(n+1)^p}-\frac{1}{N^p}\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\right],$$

由于 $\left|\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)((n+1)^p-n^p)}{n^p(n+1)^p}\right|\leqslant\frac{(n+1)^p-n^p}{n^p(n+1)^p}$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^p-n^p}{n^p(n+1)^p}}{\frac{1}{n^{1+p}}}=p$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^p-n^p}{n^p(n+1)^p}$

收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)((n+1)^p-n^p)}{n^p(n+1)^p}$ 绝对收敛．因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}$ 收敛．

但 $\frac{|\sin n|}{n^p}\geqslant\frac{\sin^2 n}{n^p}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n^p}-\frac{\cos 2n}{n^p})$，类似于上面的方法可以证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n^p}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^p}$ 发散，所以当 $0<p\leqslant 1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}$ 条件收敛．

Remark： $\frac{(n+1)^p-n^p}{n^p(n+1)^p}=\frac{1}{n^p}-\frac{1}{n^p}\cdot(1+\frac{1}{n})^{-p}=\frac{1}{n^p}-\frac{1}{n^p}\cdot(1-\frac{p}{n}+o(\frac{1}{n}))=\frac{p}{n^{1+p}}+o(\frac{1}{n^{1+p}})$．

（9）已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 的敛散性．

解：由均值不等式可知 $\left|\frac{a_n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2}(\frac{1}{n^2}+a_n{}^2)$，又 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 均收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛．

6．设 $a_n>0$， $\{a_n\}$ 单调，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛，证明： $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．

证：若 $\{a_n\}$ 单调增加，则 $0<a_n=\sqrt{a_n^2}\leqslant\sqrt{a_na_{n+1}}$，所以 $\sqrt{a_na_{n+1}}\geqslant a_1>0$，这与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛矛盾．所以 $\{a_n\}$ 单调减少．

当$\{a_n\}$单调减少时，$0<a_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}^2}\leqslant\sqrt{a_na_{n+1}}$.

因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

7．设极限$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$存在，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$收敛，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

证：因为$na_n=\sum\limits_{k=1}^{n}[ka_k-(k-1)a_{k-1}]$，且$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$存在，所以$\sum\limits_{k=1}^{\infty}[ka_k-(k-1)a_{k-1}]$收敛.

又$\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(a_k-a_{k-1})$收敛，且

$$a_{k-1}=k(a_k-a_{k-1})-[ka_k-(k-1)a_{k-1}],$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

8．设n为正整数，x_n为方程$x^n+nx-1=0$的正根．试确定α的范围，使得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$收敛.

解：设$f(x)=x^n+nx-1$，则$f(0)\cdot f(\frac{1}{n})<0$，所以方程$x^n+nx-1=0$在区间$(0,\frac{1}{n})$内有实根.

又$f'(x)=nx^{n-1}+n>0\ \ (x>0)$，所以方程$x^n+nx-1=0$的正实根唯一.

因此$0<x_n<\dfrac{1}{n}$.

注意到$x_n^n<x_n<\dfrac{1}{n}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$．由方程$x^n+nx-1=0$知

$$nx_n=1-x_n^{\ n},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$．从而$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}x_n^{\alpha}=1$.

故当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\ \alpha}$收敛；当$\alpha\leqslant 1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$发散.

9．讨论当参数p取何值时，下列级数条件收敛、绝对收敛、发散？

（1）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^n]^p}$；　　（2）级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$.

解：（在$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在等价于$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$存在．利用泰勒公式展开式，看$S_{2n}$是否收敛）

（1）易知：当$p>2$时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^n]^p}$绝对收敛；当$p\leqslant 0$时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^n]^p}$发散.

当$0<p\leqslant 2$时，考虑

$$S_{2k}=\sum_{n=2}^{2k+1}\frac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^n]^p}=\sum_{m=1}^{k}\left[\frac{1}{(\sqrt{2m}+1)^p}-\frac{1}{(\sqrt{2m+1}-1)^p}\right]$$

$$=\sum_{m=1}^{k}\frac{(\sqrt{2m+1}-1)^p-(\sqrt{2m}+1)^p}{(\sqrt{2m}+1)^p(\sqrt{2m+1}-1)^p}.$$

利用泰勒公式可知

$$(\sqrt{2m+1}-1)^p-(\sqrt{2m}+1)^p=-2p(2m)^{\frac{p-1}{2}}+\frac{p(2-p)}{2}(2m)^{\frac{p-2}{2}}+o(m^{\frac{p-2}{2}}),$$

所以当 $m\to\infty$ 时，$\dfrac{(\sqrt{2m+1}-1)^p-(\sqrt{2m}+1)^p}{(\sqrt{2m}+1)^p(\sqrt{2m+1}-1)^p}$ 等价于 $\dfrac{-2p}{(2m)^{\frac{p+1}{2}}}$，故当 $1<P\leqslant 2$ 时，$\{S_{2k}\}$ 收敛，进而得到原级数条件收敛．当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\{S_{2k}\}$ 发散，从而原级数发散．

综上可知，当 $p>2$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^n]^p}$ 绝对收敛；当 $1<P\leqslant 2$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^n]^p}$ 条件收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{[\sqrt{n}+(-1)^n]^p}$ 发散.

（2）易知：当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 绝对收敛；当 $p\leqslant 0$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 发散.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，考虑

$$S_{2k}=\sum_{n=2}^{2k+1}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}=\sum_{m=1}^{k}\left[\frac{1}{(2m)^p+1}-\frac{1}{(2m+1)^p-1}\right]$$

$$=\sum_{m=1}^{k}\frac{(2m+1)^p-(2m)^p-2}{[(2m)^p+1][(2m+1)^p-1]}.$$

利用泰勒公式可知

$$(2m+1)^p-(2m)^p-2=(2m)^p(1+\frac{1}{2m})^p-(2m)^p-2=-2+\frac{p}{(2m)^{1-p}}+o(\frac{1}{m^{1-p}}),$$

所以当 $m\to\infty$ 时，$\dfrac{(2m+1)^p-(2m)^p-2}{[(2m)^p+1][(2m+1)^p-1]}$ 与 $\dfrac{1}{m^{2p}}$ 同阶.

故当 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，$\{S_{2k}\}$ 收敛，进而由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}=0$ 得到原级数条件收敛；当 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$，$\{S_{2k}\}$ 发散，从而原级数发散.

综上可知，当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 绝对收敛；当 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 条件收敛；当 $p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 发散.

10. 设 $a_n>0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，判断 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$ 是否成立？若成立，给出证明，若不成立，举出反例。

解：$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ 不成立。例如：$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = k^2 \\ \dfrac{1}{n^2}, & n \neq k^2 \end{cases}$ 其中 $k \in \square^{+}$.

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $na_n = \begin{cases} 1, & n = k^2 \\ \dfrac{1}{n}, & n \neq k^2 \end{cases}$ 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ 不成立。