# 第十三次习题课讨论题参考解答

## 一、选择题

1. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}(x-a)^n$ 在点 $x_1=-2$ 条件收敛, 则幂级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}(x-a)^n$ 在点 $x_1=\frac{1}{2}$ 的收敛情况是 [ ] [ C ]

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 不能确定.

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ [ ]

（A） 绝对收敛，（B）条件收敛 ，（C）发散 ，（D）不定。 [ A ]

3．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为**1**，记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径为 $r$，则必有

[ ].

(A) $r=1$. (B) $r\le 1$. (C) $r\ge 1$. (D) $r$ 不能确定.

$a_n=\frac{1}{n!}-1$，$a_n+1=\frac{1}{n!}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+1)x^n$ 的收敛半径 $r=+\infty$。 （C）

4. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛域为 $[-8, 8]$，则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径 $R$ 为[ ].

（A） $R\ge 8$. （B） $R\le 8$. （C） $R=8$. （D）不定.

[ C ] (收敛的幂级数及其导数和积分有相同的收敛半径)

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!}$ 的和为[ ]

(A) $2e^{-1}$。 (B) $0$。 (C) $e^{-1}$ (D) $e^{-1}-1$ 。 [ B ]

## 二、填空题

1. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=2$ 收敛，则实参数 $a$ 的取值范围是____________。

解: 显然 $R=1$，且收敛域为 $a-1\le x<a+1$，
级数在 $x=2$ 收敛，则有 $a-1\le 2<a+1$，因此应有 $1<a\le 3$。

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$ 的收敛域为________________.

解:
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}x^{2(n+1)}}{\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}}\right|=\frac{x^2}{3}$$

$|x|<\sqrt{3}$ 时收敛，收敛半径 $R=\sqrt{3}$. 当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，通项不趋于零，级数发散.

故收敛域为 $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$.

3．设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}$，则 $f^{(100)}(0)=$__________________.

解：$f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,

$f^{(3n+1)}(0)=(-1)^n(3n+1)!$

$n=33$，　　$f^{(100)}(0)=-100\,!$

4．求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域________________.

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(t)^n$ 的收敛半径 $R=1$, 由 Leibnize 法则，收敛域为 $t\in[-1,1)$.

解 $-1\le\dfrac{x}{x+1}<1$，关于 $x$ 的收敛域为 $\left\{x\,\middle|\,x<-1,\text{或}\ge-\dfrac{1}{3}\right\}$.

5．设 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^3}$, 求 $f^{(101)}(0)=$________________.

解:考虑函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 级数展开式：

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x^3}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\ 。$$

这表明 $f^{(3n)}(0)=0$，$f^{(3n+1)}(0)=0$，$f^{(3n+2)}(0)=(-1)^n(3n+2)!$，$\forall n\ge 0$。

注意，正整数 $101$ 可以表为 $101=3\times33+2$。因此 $f^{(101)}(0)=(-1)^{33}(3\times33+2)!=-101!$。解答完毕。

## 三、计算

1．求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的和

解法一：部分和　　$S_m=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_m=\frac{1}{4}.$$

解法二：记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$$

故 $S'(x)=\int_0^x-\ln(1-x)dx=(1-x)\ln(1-x)+x$

从而 $S(x)=\int_0^x[(1-x)\ln(1-x)+x]dx=-\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x)+\frac{1}{4}(1-x)^2+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}$

所以 $S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$

2. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数.

解：设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$，则收敛域为 $(-1,1)$. 在收敛域内,

$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\frac{1}{1-x^4}$，又 $f(0)=0$，故 $f(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^4}dt=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x$.

3. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数.

解：设　$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$,

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$\int_0^x\frac{1}{s}\left[\int_0^s f(t)dt\right]ds=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}ns^{n-1}\right]ds=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{x}\left[\int_0^x f(t)dt\right]=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

4．设 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），且 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和。

解：解微分方程 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$，又 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，得 $f_n(x)=e^x\frac{x^n}{n}$，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=e^x\ln\frac{1}{1-x}$。

6．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

解：令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n}$，$|x|<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=S(\frac{1}{\sqrt{2}})$。由于

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}=x^2\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}\right)=x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)=\frac{x^2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=S(\frac{1}{\sqrt{2}})=3.$

7．将函数 $f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处展成幂级数，并求收敛区间及收敛域。

**解：**因为 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1)$，所以

$$f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}=-(x-1)\left(\frac{1}{1+x}\right)'=-(x-1)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}\right)'$$

$$=-\frac{(x-1)}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}},\ (|x-1|<2)$$

故收敛区间为 $(-1,3)$；因 $x=-1,3$ 时幂级数发散，所以收敛域为 $(-1,3)$。

8. 设函数 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数为 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$ 。令 $g(x)=\frac{xf(x)}{1+x}$，求 $g(x)$ 的 Maclaurin 级数。

解：由于 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n=\frac{x}{1+x}$，$|x|<1$。于是

$g(x)=\frac{x^2}{(1+x)^2}$，$|x|<1$。对函数 $\frac{1}{1+x}$ 的 Taylor 级数展开式 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 两边求导得 $\frac{-1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}$ 。于是我们得到 $g(x)=\frac{x^2}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n+1}$，$x\in(-1,1)$。解答完毕。

9. 求函数 $f(x)=xe^x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展式。

解：为求函数在 $x=1$ 处的幂级数，我们将函数 $xe^x$ 表为如下形式

$xe^x=e[(x-1)e^{x-1}+e^{x-1}]$。由 Taylor 级数展开式 $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ 得 $e^{x-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$ 。

于是我们有

$$xe^x=e\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}\right)=e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)}{n!}(x-1)^n\text{。}$$

解答完毕。

10. 求函数 $f(x)=\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 处的幂级数。

解：简单计算可得 $f'(x)=\frac{2}{1+x^2}$ 。将导函数 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处作 Taylor 级数展

开得 $f'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$， $|x|<1$.

再对上式两边积分并注意到 $f(0)=0$，我们就得到

$f(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$， $|x|<1$. 解答完毕。

10. 证明等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx=\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{x^2}{4}$， $\forall x\in(-\pi,\pi)$。

证明:考虑函数 $f(x)=\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{x^2}{4}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Fourier 级数。由于 $f(x)$ 是偶函数。

因此系数 $b_n=0$， $\forall n\geq 1$。经过积分计算得

$a_0=0$， $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{x^2}{4}\right)\cos nxdx=\cdots=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$， $\forall n\geq 1$。

由于 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上连续可微, 故由 Dirichlet 收敛定理可知等式成立。证毕。

11. 设 $f(x)=x^2$， $\forall x\in[0,1]$， 且记 $S(x)$ 为函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 的和函数。求 $S(-\frac{1}{2})$ 的值.

解: 由于正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 是对 $f(x)$ 作奇延拓后的 Fourier 级数. 根据 Dirichlet 收敛定理知 $S(-\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$，因为 $f(x)$ 在点 $x=\frac{1}{2}$ 处连续。解答完毕。

12. 将函数 $f(x)=x^2$， $\forall x\in(0,\pi)$ 按下列要求展开成 Fourier 级数，并求出和函数在 $[0,\pi]$ 上的值。(1) 按余弦级数展开; (2) 按正弦级数展开.

解: (1)对 $f(x)$ 偶延拓, 故系数 $b_n=0$， $\forall n\geq 1$。简单计算得

$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\dfrac{2}{3}\pi^2$， $a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=(-1)^n\dfrac{4}{n^2}$， $\forall n\geq 1$。

于是所求的余弦级数为 $x^2\sim\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$。根据 Dirichlet 收敛定理可知

和函数$S(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$在区间$[0,\pi]$上的值为$S(x)=x^2$，$\forall x\in[0,\pi]$。

(2) 对$f(x)$奇延拓,故系数$a_n=0$，$\forall n\geq 0$。简单计算得

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx=(-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}+\frac{4}{n^3\pi}\left[(-1)^n-1\right]。$$

所求的正弦级数为$x^2\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$。根据 Dirichlet 收敛定理可知和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}=\begin{cases}x^2 & x\in[0,\pi)\\ 0 & x=\pi\end{cases}$$

的值为$S(x)=x^2$，$\forall x\in[0,\pi)$，$S(\pi)=0$。解答完毕。

13．求符号函数$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ -1, & -\pi<x<0\end{cases}$ 在区间$(-\pi,\pi)$上的 Fourier 级数。

解：函数为奇函数，故$a_n=0$，$\forall n\geq 0$。

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2}{n\pi}(-\cos nx)\Big|_0^{l}=\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}，\ \forall n\geq 1。$$

$$\mathrm{sgn}(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)x，\ -\pi<x<\pi。$$

解答完毕。

14. 设$f(x)$为周期$2\pi$的连续函数，令$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$；已知$a_n,b_n$为$f(x)$的 Fourier 系数，求$F(x)$的 Fourier 系数$A_n,B_n$。

解：考虑系数$A_n,B_n$的计算。先交换积分次序，然后将积分变量$x$代换为$u=x+t$，

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}dx\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxf(t)f(x+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxf(t+x)dx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{t-\pi}^{t+\pi}\cos n(u-t)f(u)du$$

注意周期函数在任意一个周期区间上积分值不变，

$$A_n = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}(\cos nu\cos nt + \sin nu\sin nt)f(u)du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)f(t)dt = a_n^2 + b_n^2\text{，}$$

同理计算

$$A_0 = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(u)du = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du = a_0^2\text{，}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{t-\pi}^{t+\pi}\sin n(u-t)f(u)du$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}(\sin nu\cos nt - \cos nu\sin nt)f(u)du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(b_n\cos nt - a_n\sin nt)f(t)dt = b_n a_n - a_n b_n = 0\text{；}$$

综上得到

$$F(x) \sim \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\cos nx\,.$$

解答完毕。