第十二次习题课 任意项级数、函数项级数

1. 选择题

(1) 设常数$\lambda \neq 0$，$a_n > 0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$ [　　　　].

（A）绝对收敛。（B）条件收敛。（C）发散。（D）收敛性与λ有关。　　　[A]

(2) 设参数$a \neq 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$收敛性的结论是 [　　　]　　　[B]

（A） 绝对收敛　（B）条件收敛　（C）发散　（D）与参数$\boldsymbol{a}$取值有关

2. 讨论下列级数的敛散性,以及绝对收敛性或条件收敛性。

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ $(p>0)$.

解：记 $a_n = \frac{(-1)^n}{n^p}$， $b_n = \ln(1+a_n)$， $c_n = a_n - b_n$

则 $c_n \sim \frac{1}{2n^{2p}}$ 当$n \to \infty$时.

（1） $p>1$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛.

（2） $0<p\le\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

（3）$\frac{1}{2}<p\le 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 条件收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ （$x \neq -n$）.

解：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$（$x \neq -n$）当$n$充分大（即$n+x>0$）时是交错级数，且$\left\{\frac{1}{n+x}\right\}$单调减少趋于零，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$（$x \neq -n$）收敛；又由于$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}\right| \sim \frac{1}{n}$ $(n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$（$x \neq -n$）条件收敛。

（B） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$;

解：当$x=0$时$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$的一般项都为零，所以级数绝对收敛。

设$x\neq 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$当$n$充分大（即$n>\frac{2|x|}{\pi}$）时是交错级数，且$\left|\sin\frac{x}{n}\right|$单调减少趋于零，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$收敛；又由于$\left|(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}\right|\sim\frac{|x|}{n}\ (n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$条件收敛。

（C） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$

解：设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$的部分和数列为$\{S_n\}$，则

$$S_{6n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k}}{2\sqrt{3k-1}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k}}{\sqrt{3k}},$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{3n-2}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2\sqrt{3n-1}}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{3n}}$都是 Leibniz 级数，即都是收敛的，所以$\lim_{n\to\infty}S_{6n}$存在且有限。容易证明

$$\lim_{n\to\infty}S_{6n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+2}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+3}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+4}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+5}=\lim_{n\to\infty}S_{6n},$$

由此可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$收敛。

由于$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}\right|\geq\frac{1}{2\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$条件收敛。

（D） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$

解：当$x\in(k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6})$时，由于$\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right|=\frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$，

$0\leq 4\sin^2 x<1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$绝对收敛。

当 $x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$ 时，$\sin^2 x=\dfrac{1}{4}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{4^n\sin^{2n}x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 是条件收敛级数。

在其他情况下，由于 $\left|(-1)^{n+1}\dfrac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right|=\dfrac{1}{n}(4\sin^2 x)^n$，$4\sin^2 x>1$，级数的一般项趋于无穷大，所以级数发散。

（E） $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$

解：当 $x=\dfrac{k\pi}{2}$ 时，级数的一般项都为零，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

设 $x\neq\dfrac{k\pi}{2}$。当 $p>1$ 时，由于 $\left|\dfrac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}\right|\leq\dfrac{1}{n^p}$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 绝对收敛。

当 $0<p\leq 1$ 时，由于

$$\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}=\frac{\sin 2nx}{2n^p}+\frac{\sin 2x}{2n^p},$$

由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx}{2n^p}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2x}{2n^p}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 发散。

当 $p\leq 0$ 时，由于级数的一般项不趋于零，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$ 发散。

（F） $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{a}{1+a^n}$ （$a>0$）.

解：设 $x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{a}{1+a^n}$。

当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=\dfrac{1}{a}<1$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{a}{1+a^n}$ 绝对收敛；

当$a=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$，级数条件收敛；

当$0<a<1$时，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛，$\left\{\frac{a}{1+a^n}\right\}$单调有界，由 Abel 判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$收敛，但由于$|x_n|\sim\frac{a}{n}\ (n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n}$发散，所以级数条件收敛。

3. 讨论下列函数项级数的收敛域D.

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$： $D=\left\{x\in R \,\middle|\, |x-k\pi|\le\frac{\pi}{6}, k=0,\pm1,\cdots\right\}$；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$： $D=(-\infty,+\infty)$

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{200}}x^n$： $D=\{0\}$；

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}n!e^{nx}$： $D=\phi$