第六次习题课解答 二重积分及计算

1. 求解下列各题：

（1）求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{(1+\frac{i}{n})(1+(\frac{j}{n})^2)}\dfrac{1}{n^2}$

$$=\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dxdy=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{\pi}{4}\ln 2.$$

（2）求 $f(x)=\int_1^x\sin t^2dt$ 在 $[0,1]$ 上的平均值，即求 $\int_0^1 f(x)dx$.

解：$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(\int_1^x\sin t^2dt)dx=-\int_0^1(\int_x^1\sin t^2dt)dx$

$$=-\int_0^1(\int_0^t\sin t^2dx)dt=-\int_0^1 t\sin t^2dt=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

（3）当 $t\to 0^+$ 时，求无穷小量 $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}(1-\cos(x^2+y^2)]dxdy$ 的阶。

解：因为 $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}(1-\cos(x^2+y^2)]dxdy=\int_0^{2\pi}(\int_0^t(1-\cos r^2)rdr)d\theta$

$$=\pi(t^2-\sin t^2)=\pi(t^2-t^2+\frac{1}{6}t^6+o(t^6))=\pi(\frac{1}{6}t^6+o(t^6)),$$

因此当 $t\to 0^+$ 时， $f(t)$ 是 6 阶无穷小量。

（4）令 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0\}$. 计算 $\iint\limits_D\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy.$

解：因为积分区域 D 关于 x 轴对称，且 $\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是 y 的奇函数，因此

$$\iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0.$$

故 $\iint\limits_D\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D\dfrac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^1\dfrac{r}{1+r^2}dr)d\theta=\dfrac{\pi}{2}\ln 2.$

（5）设 $F(t)=\int_0^t dx\int_x^t e^{x+y}\cos\sqrt{y}dy$ （ $t>0$ ），求 $F^{'}(t).$

解：$F(t)=\int_0^t dx\int_x^t e^{x+y}\cos\sqrt{y}dy=\int_0^t e^y\cos\sqrt{y}dy\int_0^y e^x dx=\int_0^t e^y\cos\sqrt{y}(e^y-1)dy$，

故 $F^{'}(t)=e^t\cos\sqrt{t}(e^t-1)$.

（6）设 $f(x,y)$ 为连续函数且 $f(x,y)=f(y,x)$. 证明:

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^x f(1-x,1-y)dy.$$

证：令 $x=1-u, y=1-v$，则 $0\le v\le 1,\ 0\le u\le v$，且 $|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|=1$. 于是

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(1-x,1-y)dy=\int_0^1 dv\int_0^v f(u,v)du=\int_0^1 dv\int_0^v f(v,u)du=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy.$$

（7）将定积分 $\int\limits_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$ 转化为二重积分计算。

解：$\int\limits_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=\int\limits_0^1\dfrac{1}{(2-x)^2}(\int\limits_0^x\dfrac{1}{1+y}dy)dx=\int\limits_0^1\dfrac{1}{1+y}(\int\limits_y^1\dfrac{1}{(2-x)^2}dx)dy$

$$=\int\limits_0^1\frac{1}{1+y}(1-\frac{1}{2-y})dy=\frac{1}{3}\int\limits_0^1(\frac{2}{1+y}-\frac{1}{2-y})dy=\frac{1}{3}\ln 2.$$

（8）设 $f(x)\in C[0,1]$. 证明：$\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(x)}dx\ge 1$.

证明：令 $D=\{(x,y)|\ \ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，

则 D 关于直线 $y=x$ 对称，因此由轮换对称性，

$$\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(x)}dx=\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(y)}dy=\iint\limits_D e^{f(x)-f(y)}dxdy=\iint\limits_D e^{f(y)-f(x)}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D(e^{f(x)-f(y)}+e^{f(y)-f(x)})dxdy\ge 1.$$

2. 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是由锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 以及平面 $z=x$ 和 $x=0$ 围成，求空间区域 Ω 的体积。

解：空间区域 Ω 在 xoy 坐标平面内的投影区域 D 由平面曲线 $1-x=\sqrt{x^2+y^2}$ 以及直线

$x=0$围成，且D在极坐标系下表示为$D=\left\{(r,\theta)\mid -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le r\le\dfrac{1}{1+\cos\theta}\right\}$，因此空间区域$\Omega$的体积

$$V(\Omega)=\iint_D(1-\sqrt{x^2+y^2}-x)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{1+\cos\theta}}(1-r(1+\cos\theta))rdr$$

$$=\frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}d\theta=\frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4\theta}d\theta=\frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\tan^2\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta=\frac{2}{9}.$$

3. 设平面区域D是介于圆周$x^2+y^2=4$与圆周$(x+1)^2+y^2=1$之间的部分。

计算二重积分$I=\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)dxdy.$

解：积分区域D关于x轴对称，故$\iint_D ydxdy=0.$

令$D_1=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\mid (x+1)^2+y^2\le 1\right\}$，则

$$I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}dxdy-\iint_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2dr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2dr=\frac{16}{9}(3\pi-2).$$

4. 设$f(x,y)\in C^2$且满足$f(1,y)=0,\ f(x,1)=0$，$\iint_D f(x,y)dxdy=a$，其中

$D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\right\}$. 计算二重积分$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy.$

解：因为$f(1,y)=0,\ f(x,1)=0$，因此$f'_y(1,y)=0,\ f'_x(x,1)=0$. 这样

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 x\left(yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)\right)dx$$

$$=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf'_x(x,y)dx=\int_0^1\left(xf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy=a\ .$$

5. 记$D_\delta=\left\{(x,y)\mid \delta^2\le x^2+y^2\le 1\right\}$. 设$f(x,y)\in C^1$满足当$x^2+y^2=1$时，有

$f(x,y)=0$. 证明：$\lim\limits_{\delta\to 0^+}\iint\limits_{D_\delta}\dfrac{xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)}{x^2+y^2}dxdy=-2\pi f(0,0).$

证明：令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 并记$u(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. 则

$u_r'(r,\theta)=\cos\theta f_x'+\sin\theta f_y'=\dfrac{1}{r}(xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y))$.

$$故\iint\limits_{D_\delta}\frac{xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)}{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{D_\delta}\frac{ru_r'(r,\theta)}{r^2}rdrd\theta=\iint\limits_{D_\delta}u_r'(r,\theta)drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\delta^1u_r'(r,\theta)dr=\int_0^{2\pi}(u(1,\theta)-u(\delta,\theta))d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(f(\cos\theta,\sin\theta)-f(\delta\cos\theta,\delta\sin\theta))d\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}f(\delta\cos\theta,\delta\sin\theta)d\theta$$

$$=-2\pi f(\delta\cos\varphi,\delta\sin\varphi),$$

其中$\varphi\in(0,2\pi)$. 因为$f(x,y)\in C^1$，所以$f(x,y)$在$(0,0)$连续，从而

$$\lim_{\delta\to 0^+}\iint\limits_{D_\delta}\frac{xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)}{x^2+y^2}dxdy=-2\pi\lim_{\delta\to 0^+}f(\delta\cos\varphi,\delta\sin\varphi)=-2\pi f(0,0).$$

6. 记$D=\{(x,y)\,|\,|x|\le a,\ |y|\le a\}$. 设$f(x)$是连续偶函数，

证明：$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=2\int_0^{2a}(2a-u)f(u)du.$

证明：令$\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y.\end{cases}$ 则$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(u+v)\\ y=\dfrac{1}{2}(v-u)\end{cases}$

且$D=\{(x,y)\,|\,|x|\le a,\ |y|\le a\}$转化为新坐标系下的区域

$D_1=\{(u,v)\,|\,|u|+|v|\le 2a\}$，且$\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}$.

$$故\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_1}f(u)dudv=\frac{1}{2}2\int_0^{2a}du\int_{-2a+u}^{2a-u}f(u)dv=2\int_0^{2a}(2a-u)f(u)du.$$

7. 设 $f(x,y)\in C^2$ 且关于两个变量 x 和 y 的周期都为 1，即对任意的 (x,y),

$f(x+1,y)=f(x,y),\quad f(x,1+y)=f(x,y)$. 若 $f(x,y)$ 满足

$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}f(x,y)(f_{xx}^{''}(x,y)+f_{yy}^{''}(x,y))dy\geq 0$, 证明： $f(x,y)$ 是常函数。

证明：因为

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}f(x,y)(f_{xx}^{''}(x,y)+f_{yy}^{''}(x,y))dy\\&=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}f(x,y)f_{xx}^{''}(x,y)dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}f(x,y)f_{yy}^{''}(x,y)dy,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}f(x,y)f_{xx}^{''}(x,y)dy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{1}f(x,y)f_{xx}^{''}(x,y)dx\\&=\int_{-1}^{1}(f(x,y)f_{x}^{'}(x,y)\Big|_{x=-1}^{x=1}-\int_{-1}^{1}(f_{x}^{'}(x,y))^2dx)dy\\&=-\int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1}(f_{x}^{'}(x,y))^2dx)dy\\&=-\iint\limits_{\substack{|x|\leq 1\\|y|\leq 1}}(f_{x}^{'}(x,y))^2dxdy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}f(x,y)f_{yy}^{''}(x,y)dy\\&=\int_{-1}^{1}(f(x,y)f_{y}^{'}(x,y)\Big|_{y=-1}^{y=1}-\int_{-1}^{1}(f_{y}^{'}(x,y))^2dy)dx\\&=-\int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1}(f_{y}^{'}(x,y))^2dy)dx\\&=-\iint\limits_{\substack{|x|\leq 1\\|y|\leq 1}}(f_{y}^{'}(x,y))^2dxdy,\end{aligned}$$

故当 $\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}f(x,y)(f_{xx}^{''}(x,y)+f_{yy}^{''}(x,y))dy\geq 0$ 时，

必有 $\iint\limits_{\substack{|x|\leq 1\\|y|\leq 1}}[(f_{x}^{'}(x,y))^2+(f_{y}^{'}(x,y))^2]dxdy\leq 0,$

由于 $(f_{x}^{'}(x,y))^2+(f_{y}^{'}(x,y))^2$ 是非负连续函数，

因此对 $\forall(x,y)$ 满足 $|x|\leq 1,\ |y|\leq 1$，有 $(f_{x}^{'}(x,y))^2+(f_{y}^{'}(x,y))^2=0$.

从而对 $\forall(x,y)$ 满足 $|x|\leq 1,\ |y|\leq 1$， $f_{x}^{'}(x,y)=0$ 且 $f_{y}^{'}(x,y)=0$，

这样 $f(x,y)$ 在区域 $\{(x,y)\,\|\,x|\leq 1,\ |y|\leq 1\}$ 上是常数。

由函数 $f(x,y)$ 的周期性知， $f(x,y)$ 在其定义域上是常数。

8. 设二元函数 $f(x,y)$ 在开单位圆盘 $D: x^2+y^2<1$ 上是 C^2 的，在闭单位圆盘 $\overline{D}: x^2+y^2\le 1$ 上连续。若函数 $f(x,y)$ 在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上取值为常数零，证明: $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)[f_{xx}^{''}(x,y)+f_{yy}^{''}(x,y)]dxdy\le 0$.

证明：将重积分化为累次积分，然后再做分部积分，并利用假设条件。

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)f_{xx}^{''}(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)f_{xx}^{''}(x,y)dx=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} fdf_x^{'}$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[f(x,y)f_x^{'}(x,y)\Big|_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}}-\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y^2}} f_x^{'}(x,y)^2dx\right]dy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f_x^{'}(x,y)^2dxdy\le 0.$$

同理可证 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)f_{yy}^{''}(x,y)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f_y^{'}(x,y)^2dxdy\le 0$. 因此

$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)[f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)]dxdy\le 0$. 证毕

9. 设 $f(x)\in C[0,1]$ 且 $0<m\le f(x)\le M$ $(\forall x\in[0,1])$.

证明：$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}\frac{f(x)}{f(y)}dxdy\le\frac{(M+m)^2}{4Mm}$.

证明：$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}\frac{f(x)}{f(y)}dxdy=\int_0^1\frac{1}{f(y)}dy\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\int_0^1 f(x)dx.$

因为 $\forall x\in[0,1]$，$(M-f(x))(f(x)-m)\ge 0,$

因此 $(M+m)f(x)\ge f^2(x)+Mm,$ 从而 $M+m\ge f(x)+\frac{Mm}{f(x)},$

两边积分得，$M+m\ge\int_0^1 f(x)dx+Mm\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx,$

记 $a=\int_0^1 f(x)dx,$ $b=\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx,$ 则 $M+m\ge b+aMm\ge 2\sqrt{abMm},$

故 $ab\le\frac{(M+m)^2}{Mm}$. 所以 $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}\frac{f(x)}{f(y)}dxdy=ab\le\frac{(M+m)^2}{4Mm}$.

10. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D |xy| dxdy$，其中 D 为圆域: $x^2+y^2 \le a^2$.

解：由对称性有

$$\iint\limits_D |xy| dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r\sin\theta \cdot r\cos\theta \cdot rdr$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta \cdot \int_0^a r^3 dr = 2\cdot \frac{-\cos 2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^a = \frac{a^4}{2}.$$

(2) $\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)dxdy, D=\{(x,y)\,|\,0\le x+y\le\pi, 0\le x-y\le\pi\};$

解: 令 $x=\frac{1}{2}(u+v), y=\frac{1}{2}(u-v),$ 则 $D^{'}=\{(u,v)\,|\,0\le u\le\pi, 0\le v\le\pi\},$

$\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$. 于是

$$\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)dxdy = \iint\limits_{D^{'}} u\sin v\cdot\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} udu\int_0^{\pi}\sin vdv = \frac{1}{2}\pi^2.$$

(3) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy, D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}.$

解：令 $x=v-u, y=u,$ 则 $D^{'}=\{(u,v)\,|\,0\le u\le v, 0\le v\le 1\},$ $\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1.$

于是 $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy = \iint\limits_{D^{'}} e^{\frac{u}{v}}dudv = \int_0^1 dv\int_0^v e^{\frac{u}{v}}du = \frac{1}{2}(e-1).$

11. 求由曲线所围的平面图形面积: $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2 = x^2+y^2$.

解：令 $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$，则 $\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = abr$，

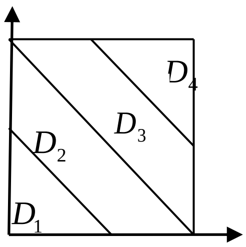
$D^{'}=\{(r,\theta): 0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\}.$

于是所求面积

$$S(D)=\iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D^{'}} abrdrd\theta = ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}} rdr$$

$$=\frac{1}{2}ab\pi(a^2+b^2).$$

12. 求$I=\iint\limits_D [x+y]d\sigma$，其中$D=[0,2]\times[0,2]$，$[x+y]$为取整函数。



解：为方便, 对D作分解$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$，如图。于是

$$I=\iint\limits_D [x+y]d\sigma=\iint\limits_{D_1}[x+y]d\sigma+\iint\limits_{D_2}[x+y]d\sigma+\iint\limits_{D_3}[x+y]d\sigma+\iint\limits_{D_4}[x+y]d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1}0d\sigma+\iint\limits_{D_2}1\cdot d\sigma+\iint\limits_{D_3}2\cdot d\sigma+\iint\limits_{D_4}3\cdot d\sigma$$

$$=S(D_2)+2S(D_3)+3S(D_4)=6.$$

其中$S(D_2)=S(D_3)=\dfrac{3}{2}$，$S(D_1)=S(D_4)=\dfrac{1}{2}$，解答完毕。

13. 计算$I=\iint\limits_D \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$，其中$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le R^2\right\}$且$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\in C(D)$.

解：考虑极坐标系$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ $dxdy=\rho d\rho d\theta$. 则

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial(\rho,\theta)}\cdot\frac{\partial(\rho,\theta)}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta},$$

其中
$$\frac{\partial(\rho,\theta)}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right)^{-1}\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\rho\cos\theta & \rho\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}0\\-\rho\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

故
$$I=\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\sigma=-\iint\limits_{\substack{0\le\rho\le R\\0\le\theta\le2\pi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\rho d\rho d\theta$$

$$=-\int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial\theta}d\theta=-\int_0^R\left(f(\rho,2\pi)-f(\rho,0)\right)d\rho=0.$$

14. 计算$I=\iint\limits_D\left|x^2+y^2-4\right|d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le16\}$.

解：记 $D=D_1\cup D_2$， $D_1: x^2+y^2\le 4$， $D_2: 4\le x^2+y^2\le 16$，则

$$I=\iint\limits_{D_1}(4-x^2-y^2)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-4)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^2(4-r^2)rdr+\int_0^{2\pi}d\phi\int_2^4(r^2-4)rdr$$

$$=2\pi(2r^2-\frac{r^4}{4})\Big|_0^2+2\pi(\frac{r^4}{4}-2r^2)\Big|_2^4=80\pi.$$

或者 $$I=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-4)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-4)d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1\cup D_2}(x^2+y^2-4)d\sigma-2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-4)d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^4(r^2-4)rdr-2\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^2(r^2-4)rdr=80\pi.$$

解答完毕。

15. 利用二重积分理论，证明下列结论：设 $f(x)$， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

（1） $\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\le(b-a)\int_{a,}^b f^2(x)dx$；

（2） $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_{a,}^b g^2(x)dx$.

（3） $\int_a^b dx\int_x^b f(x)f(y)dy=\frac{1}{2}(\int_a^b f(x)dx)^2$.

证明：

（1） $$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2=\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)dy=\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}f(x)f(y)dxdy$$

$$\le\frac{1}{2}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}[f^2(x)+f^2(y)]dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}f^2(x)dxdy+\frac{1}{2}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}f^2(y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)\int_a^b f^2(x)dx+\frac{1}{2}\int_a^b f^2(y)dy=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

（2）由不等式 $[f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2\ge 0$ 得

$$0\le\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}[f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2dxdy$$

$$=\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}[f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)-2f(x)g(x)f(y)g(y)]dxdy$$

$$=2\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx-2\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$. 由此立刻得到不等式(2).

（3）令 $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,x\le y\le b\}$， $E=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,a\le y\le x\}$. 则

D 与 E 关于 $y=x$ 对称，因此

$$\int_a^b dx\int_x^b f(x)f(y)dy=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)dy=\frac{1}{2}(\int_a^b f(x)dx)^2.$$

=====

以下内容为学有余力的同学选做。

16. 设函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_y^{'}(x,y)$ 在平面区域 D 上连续，其中

$D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$，这里 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $\varphi(x)\le\psi(x)$. 进一步假设 $f(x,\varphi(x))=0$， $\forall x\in[a,b]$. 证明存在常数 $C>0$，使得 $\iint\limits_D f^2(x,y)dxdy\le C\iint\limits_D (f_y^{'}(x,y))^2dxdy$.（这个不等式称作 Poincare 不等式）

证明：根据假设和 Newton—Leibniz 公式得 $f(x,y)=\int_{\varphi(x)}^{y} f_t^{'}(x,t)dt$.

两边平方并应用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$f^2(x,y)=\left(\int_{\varphi(x)}^{y} f_t^{'}(x,t)dt\right)^2\le(y-\varphi(x))\int_{\varphi(x)}^{y}(f_t^{'}(x,t))^2dt\le[\psi(x)-\varphi(x)]\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}(f_y^{'}(x,y))^2dy$$

两边关于 y 在区间 $[\varphi(x),\psi(x)]$ 上积分得

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)dy\le[\psi(x)-\varphi(x)]^2\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}(f_y^{'}(x,y))^2dy.$$

记 $C=\max\{[\psi(x)-\varphi(x)]^2,a\le x\le b\}$. 则 $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)dy\le C\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}(f_y^{'}(x,y))^2dy$.

对上述不等式关于 x 在区间 $[a,b]$ 上积分得 $\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)dy\le C\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}(f_y^{'}(x,y))^2dy$。

再将上式两边的累次积分换成重积分，即得所要证明的 Poincare 不等式。 证毕。

以下两题为广义重积分的计算（这部分内容大纲不做要求，同学们根据自己的情况自由选择练习）

1．计算二重广义积分 $\iint\limits_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$。（第三章总复习题题 7 (2), page 171.）

解：作极坐标变换： $x = r\cos t$， $y = r\sin t$，则所求积分为

$$\iint\limits_{0\le r<+\infty, 0\le t\le 2\pi} e^{-r^2}\sin r^2 rdrdt = \int_0^{2\pi} dt \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-s}\sin sds$$

注意 $\int_0^{+\infty} e^{-s}\sin sds = \left.\dfrac{-e^{-s}(\cos s+\sin s)}{2}\right|_{s=0}^{s=+\infty} = \dfrac{1}{2}$。于是我们得到

$\iint\limits_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy = \dfrac{\pi}{2}$。 解答完毕。

2. 计算二重广义积分 $\iint\limits_{R^2} e^{2xy-2x^2-y^2}dxdy$。（第三章总复习题题 7 (3), page 171）

解：注意 $2xy-2x^2-y^2 = -(x-y)^2-x^2$。令 $u = x$， $v = x-y$，则

其逆变换为 $x = u$， $y = u-v$。于是原积分等于

$\iint\limits_{R^2} e^{2xy-2x^2-y^2}dxdy = \iint\limits_{R^2} e^{-u^2-v^2}\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv = \sqrt{\pi}\sqrt{\pi} = \pi$。解答完毕。