第八次习题课讨论题：曲线积分、Green 公式的应用

1．设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a．求 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl$．

解法一、椭圆 L 的方程可写成 $3x^2+4y^2=12$．于是

$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=\oint_L(12+2xy)dl=12a+\oint_L 2xydl$$

由对称性，$\oint_L 2xydl=0$，故 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=12a$．

解法二、椭圆 L 的参数方程：$x=2\cos\theta$，$y=\sqrt{3}\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi]$．于是所求第一型曲线积分为 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)dl=12a+2\oint_L xydl$．而

$$\oint_L xydl=\int_0^{2\pi}\left[2\cos\theta\sqrt{3}\sin\theta\right]\sqrt{4\sin^2\theta+3\cos^2\theta}d\theta=0.$$ 因此原积分为 $12a$．

2．计算第二型曲线积分 $\int_{\mathrm{L}}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 是

(1) $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$，顺时针定向．

(2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，顺时针定向．

(3) 从 $A(2,0)$ 到 $B(4,4)$ 的有向线段．

解：记 $X=\frac{x-y}{x^2+y^2}$，$Y=\frac{x+y}{x^2+y^2}$，则 $\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Y}{\partial x}$，故曲线积分与路径无关。

（1） 设 L 是椭圆 $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$，顺时针为正方向．由于 X,Y 在椭圆盘 $(x-2)^2+4(y-1)^2\le1$ 上连续可微，根据 Green 公式得

$$\oint_{\mathrm{L}}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=\oint_{\mathrm{L}}Xdx+Ydy=-\iint_{(x-2)^2+4(y-1)^2\le1}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

（2） 设 L 是闭曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，顺时针定向．我们取正数 δ 充分小，使得圆周 $L_\delta: x^2+y^2=\delta^2$ 包含在 L 所围的区域之内， 并规定逆时针为正向．计算 L_δ 上的积分：

$$\oint_{L_\delta}\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\delta(\cos\theta+\sin\theta)\delta\cos\theta+\delta(\cos\theta-\sin\theta)\delta(-\sin\theta)}{\delta^2}\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

而由格林公式可知 $\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\oint_{L_\delta}\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-2\pi$.

（3）因为曲线积分 $\int_{\mathrm{L}}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$ 在右半平面上与积分路径无关，因此可取积分路径 L 为两个直线段：点 $(2,0)$ 到点 $(4,0)$ 的直线段，以及点 $(4,0)$ 到点 $(4,4)$ 的直线段。于是所求积分为

$$\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{(2,0)}^{(4,0)}\frac{xdx}{x^2}+\int_{(4,0)}^{(4,4)}\frac{(4+y)dy}{4^2+y^2}=\ln2+\int_0^4\frac{4dy}{4^2+y^2}+\int_0^4\frac{ydy}{4^2+y^2}$$

$$=\ln2+\arctan1+\tfrac{1}{2}(\ln(4^2+4^2)-\ln4^2)=\tfrac{3}{2}\ln2+\pi/4.$$

3．设 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y)|\ x^2+y^2<1\}$ 内二阶偏导连续，且满足方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{1}{2}f(x,y)$. 进一步假设 $f(0,0)=1$．求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l$， 这里 $\vec{n}$ 为圆周 ∂D_t 的单位外法向量，$D_t=\{(x,y)|\ x^2+y^2<t^2,\ t>0\}$.

解：注意方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ 可写作 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\nabla f\cdot\vec{n}$．于是利用格林公式得

$$\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}dl=\oint_{\partial D_t}\nabla f\cdot\vec{n}dl=\iint_{D_t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_{D_t}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对上式最后的二重积分应用中值定理得

$\oint_{\partial D_t}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\dfrac{1}{2}\iint_{D_t}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}f(\xi_t,\eta_t)\pi t^2$，其中点 $(\xi_t,\eta_t)\in D_t$．于是

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(\xi_t,\eta_t)t^2}{1-\cos t}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}f(\xi_t,\eta_t)\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos t}=\frac{\pi}{2}f(0,0)2=\pi.$$

4． 设函数 $f(x,y)$ 在上半平面 $D=\{(x,y)|y>0\}$ 内具有连续偏导数, 且对任意的 $t>0$，对任意点 $(x,y)\in D$，都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$（此即 $f(x,y)$ 是 -2 次齐次函数)。证明对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L, 都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$.

解：在等式 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边关于 t 求导得

$xf_x'(tx,ty)+yf_y'(tx,ty)=-2t^3 f(x,y)$，$\forall(x,y)\in D$，$\forall t>0$.

令 $t=1$ 得 $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=-2f(x,y)$ （此即齐次函数的 Euler 公式）。

这个等式意味着 $\dfrac{\partial(-xf)}{\partial x}-\dfrac{\partial(yf)}{\partial y}=-f-xf_x'-f-yf_y'=0$，故曲线积分与积分路径无关，只与起点与终点有关，再注意区域 D 为单连通的，因此向量值函数 $(yf,-xf)$ 在区域 D 中的任何闭路径积分为零，即 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$.

解法二、由条件，对任意的 $t>0$，及任意点 $(x,y)\in D$，都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，

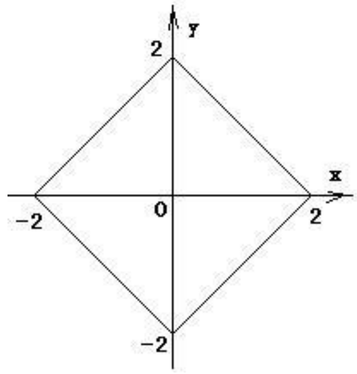
因为 $y>0$，因此 $f(x,y)=y^{-2}f(\dfrac{x}{y},1)$，所以

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=\oint_L f(\frac{x}{y},1)d(\frac{x}{y})=\int_a^a \mathrm{g}(\frac{x}{y})d(\frac{x}{y})=0.$$

其中 $\mathrm{g}(\dfrac{x}{y})=f(\dfrac{x}{y},1)$ 是关于 $\dfrac{x}{y}$ 的函数，a 是封闭曲线 L 的起点对应的参数方程参数的取值。证毕。

5. 设C为闭曲线：$|x|+|y|=2$，逆时针为正向。

计算$\oint_C \dfrac{axdy-bydx}{|x|+|y|}$.



解：利用$|x|+|y|=2$，$\oint_C \dfrac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=\dfrac{1}{2}\oint_C axdy-bydx$，

再将曲线分成 4 段直线段$C=C_1+C_2+C_3+C_4$，

$C_1: x+y=2$，$0\le x\le 2$，x减小为正向；

$C_2: y-x=2$，$-2\le x\le 0$，x减小为正向；

$C_3: x+y=-2$，$-2\le x\le 0$，x增加为正向；

$C_4: x-y=2$，$0\le x\le 2$，x增加为正向；

$$\int_{C_1} axdy-bydx=-\int_0^2[ax(-1)-b(2-x)]dx=\int_0^2[(a-b)x+2b]dx=2(a+b),$$

$$\int_{C_2} axdy-bydx=-\int_{-2}^0[ax-b(2+x)]dx=\int_{-2}^0[(b-a)x+2b]dx=2(a+b),$$

$$\int_{C_3} axdy-bydx=\int_{-2}^0[ax(-1)-b(-2-x)]dx=\int_{-2}^0[(b-a)x+2b]dx=2(a+b),$$

$$\int_{C_4} axdy-bydx=\int_0^2[ax-b(x-2)]dx=\int_0^2[(a-b)x+2b]dx=2(a+b),$$

综上，原式$=\dfrac{1}{2}\left[\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}\right]=4(a+b)$.

注：利用 Green 公式，后面一段关于曲线积分的计算可以大大简化：

记$|x|+|y|=2$围成的区域为D，则利用$|x|+|y|=2$和 Green 公式，得

$$\oint_C \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=\frac{1}{2}\oint_C axdy-bydx=\frac{1}{2}\iint_D (a+b)dxdy$$
$$=\frac{1}{2}(a+b)\sigma(D)=\frac{1}{2}(a+b)8=4(a+b).$$

6. 计算曲线积分$I=\oint_{L^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L^+$为$|x|+|y|=1$，逆时针为正向。

解：记$P(x,y)=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$. 不难验证$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-4x^2}{4x^2+y^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. 因此曲线积分与积分路径无关。记$L_\varepsilon^+: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$，逆时针为正向。在由正方形$L^+$和椭圆$L_\varepsilon^+$所围成的有界闭区域上，应用 Green 公式得

$\oint_{L^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{L_\varepsilon^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_\varepsilon}xdy-ydx$. 对曲线积分$\oint_{L_\varepsilon}xdy-ydx$再应用 Green 公

式得 $I=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\oint\limits_{L_\varepsilon} xdy-ydx=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{4x^2+y^2\le\varepsilon^2} 2dxdy=\pi$.

7. 设 $D\subseteq R^2$ 为有界开区域，它的边界 ∂D 是逐段光滑曲线，$\bar{n}$ 是 ∂D 的外单位法向量，设函数 $f(x,y)\in C^2(\overline{D})$，且 $f(x,y)$ 在 D 内为调和函数，即 $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$. 求证：

(i) $\oint\limits_{\partial D}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}dl=0$；

(ii) $\oint\limits_{\partial D} f\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}dl=\iint\limits_{D}\left|\nabla f\right|^2 dxdy$；

(iii) 若在边界 ∂D 上，$f(x,y)\equiv 0$，求证 $f(x,y)\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$.

解： (i) 由于 $\Delta f=0$, $\oint\limits_{\partial D}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}dl=\oint\limits_{\partial D}\nabla f\cdot\vec{n}dl=\iint\limits_{\overline{D}}\Delta f\,dxdy=0$.

(ii) $\oint\limits_{\partial D} f\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}dl=\oint\limits_{\partial D} f\nabla f\cdot\vec{n}dl=\iint\limits_{\overline{D}}\left(\dfrac{\partial(ff_x^{'})}{\partial x}+\dfrac{\partial(ff_y^{'})}{\partial y}\right)dxdy$

$$=\iint\limits_{\overline{D}}\left[f(f_{xx}^{"}+f_{yy}^{"})+f_x^{'2}+f_y^{'2}\right]dxdy$$

$$=\iint\limits_{D}\left|\nabla f\right|^2 dxdy.$$（这里用到了假设 $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv 0$）

(iii) 由(ii)的结论可知，若 $f(x,y)\equiv 0$，$\forall(x,y)\in\partial D$，则 $\nabla f\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$.

即 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\equiv 0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$，所以 $f(x,y)\equiv const$，从而 $f(x,y)\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$. 证毕。

8. 已知函数 $f(x)\in C^2(\square)$ 满足 $f'(0)=0$，且使得微分式

$$[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy$$

是某个函数的全微分，求 $f(x)$ 使得 $\int_L[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy=\dfrac{\pi^2}{8}$, 其中 L 是由

$A(0,0)$ 到 $B(\frac{\pi}{2},\pi)$ 的逐段光滑曲线。

解：因为微分式 $[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy$ 是某个函数的全微分，因此 $f''(x)=x-f(x)$，即 $f''(x)+f(x)=x$. 这是关于未知函数 $f(x)$ 的二阶常系数线性常微分方程。根据线性 ODE 一般理论知，对应的齐次方程 $f''(x)+f(x)=0$ 的通解为 $c_1\cos x+c_2\sin x$. 另一方面不难看出方程 $f''(x)+f(x)=x$ 有一个特解 x. 因此原方程的通解为

$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x$. 关于函数 $f(x)$ 的两个条件，条件 $f'(0)=0$ 以及条件由 $A(0,0)$ 到 $B(\frac{\pi}{2},\pi)$ 逐段光滑曲线 L 上积分的值为 $\frac{\pi^2}{8}$，可以唯一确定两个常数 c_1，c_2. 对 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x$ 求导得 $f'(x)=-c_1\sin x+c_2\cos x+1$，$f'(0)=c_2+1=0$，$c_2=-1$. 于是 $f(x)=c_1\cos x-\sin x+x$，$f'(x)=-c_1\sin x-\cos x+1$. 所以

$$[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy=d[c_1\sin x+\cos x+\frac{1}{2}x^2+y(-c_1\sin x-\cos x+1)]$$

由 $A(0,0)$ 到 $B(\frac{\pi}{2},\pi)$ 积分得 $[c_1+\frac{\pi^2}{8}+\pi(-c_1+1)]-1=c_1(1-\pi)+\frac{\pi^2}{8}+\pi-1=\frac{\pi^2}{8}$,

得 $c_1=1$. 于是 $f(x)=\cos x-\sin x+x$. 解答完毕。

9. 设 $f(x)$ 是实轴上处处为正的连续函数，D 为圆心在原点的单位开圆盘。

证明：(i) $\int_{\partial D^+} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\int_{\partial D^+} -yf(x)dx+\frac{x}{f(y)}dy$；

(ii) $\int_{\partial D^+} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi$.

证明：对等式(i)的两边曲线积分，分别应用 Green 公式得

左边$=\iint_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy$，右边$=\iint_D\left[f(x)+\frac{1}{f(y)}\right]dxdy$.

由于积分区域为单位圆盘，具有轮换对称性，故上述两个二重积分相等。因此等式(i)成立。

(ii) 类似，我们不难看出 $\iint\limits_{D} f(x)dxdy=\iint\limits_{D} f(y)dxdy$，$\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{f(x)}dxdy=\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{f(y)}$.

这表明，在如下两个二重积分中，

$$\iint\limits_{D}\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy \quad 和 \quad \iint\limits_{D}\left[f(x)+\frac{1}{f(y)}\right]dxdy。$$

将被积函数中的变元 x 换为 y，并不改变积分的值。因此

$$\int\limits_{\partial D} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint\limits_{D}\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy=\iint\limits_{D}\left[f(y)+\frac{1}{f(y)}\right]dxdy.$$

由于 $f(y)+\frac{1}{f(y)}\geq 2$，因此 $\int\limits_{\partial D} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq\iint\limits_{D}2dxdy=2\pi$. 证毕。

10. 记 L^+ 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y=x\tan\alpha \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$，从 x 轴的正向看去，圆周的正向为顺时针方向。

写出 L^+ 的参数方程，并利用这个参数方程来计算曲线积分

$$I=\oint\limits_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz.$$

解：在球坐标系下曲线的方程为 $\rho=a,\ \varphi=\alpha$，由此得到 L^+ 的参数方程

$$L^+:\begin{cases} x=a\cos\alpha\sin\theta \\ y=a\sin\alpha\sin\theta \\ z=a\cos\theta \end{cases} \qquad 0\leq\theta\leq 2\pi，参数增加的方向为曲线正向，$$

代入曲线积分式，得

$$\begin{aligned} I&=\oint\limits_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz \\ &=\int_0^{2\pi}[a(\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta)(a\cos\alpha\cos\theta)+a(\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta)(a\sin\alpha\cos\theta) \\ &\quad +a(\cos\alpha\sin\theta-\sin\alpha\sin\theta)(-a\sin\theta)]d\theta \\ &=\int_0^{2\pi}a^2(\sin\alpha-\cos\alpha)d\theta=2\pi a^2(\sin\alpha-\cos\alpha). \end{aligned}$$

11. 确定常数 α，使得积分 $\int_A^B(x^4+4xy^\alpha)dx+(6x^{\alpha-1}y^2-5y^4)dy$ 与路径无关， 并求原函数 $\varphi(x,y)$，使得 $d\varphi=(x^4+4xy^\alpha)dx+(6x^{\alpha-1}y^2-5y^4)dy$.

解：记 $P(x,y)=x^4+4xy^\alpha$，$Q(x,y)=6x^{\alpha-1}y^2-5y^4$. 令 $P_y^{'}=Q_x^{'}$，得

$4\alpha xy^{\alpha-1}=6(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^2$. 由此解得$\alpha-2=1$，且$4\alpha=6(\alpha-1)$，$\alpha-1=2$，所以$\alpha=3$.

当$\alpha=3$时， 对微分形式$(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$作适当组合得

$(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=x^4dx-5y^4+(4xy^3dx+6x^2y^2dy)$

$=d(\frac{x^5}{5}-y^5+2x^2y^3)$. 由此可得所求原函数为$\varphi(x,y)=\frac{x^5}{5}-y^5+2x^2y^3+c$. 解答完毕。

12. 证明曲线积分$\int\limits_{\Gamma}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$，在右（或左）半平面（$x>0$

或$x<0$）上与路径无关。（注意右半平面上或左半平面均为单连通区域）。

并计算$\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$.

解法一：记$P(x,y)=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$，$Q(x,y)=\sin\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$.

则不难验证$P_y^{'}=Q_x^{'}$. 因此积分$\int\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy$在任何单连通区域内与积分路径无关。我们来求微分式$Pdx+Qdy$的原函数$u(x,y)$，即求$u(x,y)$使得$du=Pdx+Qdy$.

利用凑微分方法来求$u(x,y)$：

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy\\&=dx+y\cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)+\sin\frac{y}{x}dy\\&=dx+y\cos\frac{y}{x}d\left(\frac{y}{x}\right)+\sin\frac{y}{x}dy=dx+yd\left(\sin\frac{y}{x}\right)+\sin\frac{y}{x}dy\\&=d\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right)\text{，所以}u(x,y)=x+y\sin\frac{y}{x}+C.\end{aligned}$$

因此 $$\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

$$=\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}du=u(x,y)\Big|_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}=(2+\pi+C)-(1+C)=1+\pi.$$

解法二：判断积分与路径无关后，选取$(1,\pi)$到$(2,\pi)$的直线段为积分路径，这时$y=\pi$，$dy=0$，$1\le x\le 2$增加为积分路径的正向。于是所求积分为

$$I=\int_1^2\left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)dx=\left(x+\pi\sin\frac{\pi}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}=1+\pi.$$

解答完毕。

13. 求二元函数 $Q(x,y)\in C^1(\mathbf{R}^2)$ 使得曲线积分 $\int\limits_{L^+} 2xydx+Q(x,y)dy$ 与积分路径 L 无关，且对 $\forall t\in\mathbf{R},$ 均有 $\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy$.

解： 因为曲线积分 $\int\limits_{L^+} 2xydx+Q(x,y)dy$ 与积分路径 L 无关，

因此 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$，故 $Q(x,y)=x^2+f(y)$，其中 $f(y)$ 是连续可导函数。

又知，对 $\forall t\in\mathbf{R},$ 有 $\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy$，

故 $\int_0^t(1+f(y))dy=\int_0^1(t^2+f(y))dy$，从而 $f(t)=2t-1$，且 $Q(x,y)=x^2+2y-1.$

14. 设 L 是平面上简单光滑的封闭曲线，$\vec{n}$ 为 L 的外向单位法向量，求证：$\oint\limits_L\cos\langle\vec{n},j\rangle dl=0,$

其中 $\langle\vec{n},j\rangle$ 是 $\vec{n}$ 与 y 轴正向所成的角。

证明：记 $\langle\vec{n},j\rangle=\theta$. 设 L 的正向单位切向量为 $\vec{\tau}$，则 $\vec{\tau}$ 与 x 轴正向所成的角 $\pi-\theta$.

所以 $\cos\langle\vec{n},j\rangle=-\cos\langle\vec{\tau},i\rangle$. 从而 $\oint\limits_L\cos\langle\vec{n},j\rangle dl=-\oint\limits_L dx,$

由格林公式，$\oint\limits_L dx=0$，因此 $\oint\limits_L\cos\langle\vec{n},j\rangle dl=0.$

15. 设 L 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=2x+4\end{cases}$ 在第一卦限的部分，方向是从点 $(0,1,4)$ 到点 $(1,0,6)$，计算曲线积分 $I=\int\limits_L ydx-(x^2+y^2+z^2)dz.$

解：以 x 为参数，曲线 L 的参数方程：$\begin{cases}x=x\\ y=\sqrt{1-x^2}\\ z=2x+4\end{cases}$，起点对应 $x=0$，终点对应 $x=1$，

所以 $I=\int\limits_L ydx-(x^2+y^2+z^2)dz=\int_0^1[\sqrt{1-x^2}-2(1+(2x+4)^2)]dx=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{158}{3}.$

16. 设有向光滑曲线 L 的长度为 l，$P(x,y),\ Q(x,y)$ 在 L 上连续。

记 $M=\max\left\{\sqrt{P(x,y)^2+Q(x,y)^2}\ \middle|\ (x,y)\in L\right\}$. 求证：$\left|\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|\le Ml.$

证明：设 $\vec{\tau}$ 是曲线 L 的正向单位切向量，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L (P(x,y),Q(x,y))\cdot\vec{\tau}dl.$$

而$\left|(P(x,y),Q(x,y))\cdot\vec{\tau}\right|\le\sqrt{P(x,y)^2+Q(x,y)^2}$，

故$\left|\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|=\left|\int_L (P(x,y),Q(x,y))\cdot\vec{\tau}dl\right|\le\int_L\left|(P(x,y),Q(x,y))\cdot\vec{\tau}\right|dl$

$\le\int_L\sqrt{P(x,y)^2+Q(x,y)^2}dl\le\int_L Mdl=Ml$.

======

以下供学有余力的同学选做。

1. （利用 Green 公式证明平面面积变换公式）回忆平面面积变换定理:

设φ是平面域上二阶连续可微可逆映射且其逆也是连续可微的。假设开区域D_0及其边界∂D_0均属于φ的定义域。记开区域D_0在映射φ下的像为D_1，即$D_1=\varphi(D_0)$. 根据曲面面积公式知D_1的面积公式为$|D_1|=\iint_{D_0}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$，这里$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$表示映射$\varphi$的两个分量函数。试利用 Green 公式来证明上述面积变换公式。

证明：设开区域D_0的边界∂D_0的参数方程$\mathrm{u}=u(t)$，$\mathrm{v}=v(t)$，$a\le t\le b$，并且$\partial \mathrm{D}_0$的正向（逆时针）与参数t增加的方向一致，那么区域D_1的边界$\partial\mathrm{D}_1$有相应的参数表示

$$x=x(t)=x(u(t),v(t))，\quad y=y(t)=y(u(t),v(t))，\quad a\le t\le b.$$

这是因为映射φ把内点映为内点，映边界点为边界点。因此$\partial\mathrm{D}_1=\varphi$（$\partial\mathrm{D}_0$）. 假设映射$\varphi$保持定向，即它的 Jacobi 矩阵行列式在其定义域上恒大于零，即$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}>0$，$\forall(u,v)\in D_0$，则$\partial\mathrm{D}_1$的正向与参数 t 增加的方向一致. 于是根据 Green 公式提供的面积公式得D_1的面积为

$$|\mathrm{D}_1|=\oint_{\partial\mathrm{D}_1}xdy=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}x(t)y'(t)dt=\int_a^b x(t)[y_u'u'(t)+y_v'v'(t)]dt=\oint_{\partial D_0}xy_u'du+xy_v'dv.$$

对上式最后一个积分应用 Green 公式得

$$|\mathrm{D}_1|=\iint_{D_0}\left(\frac{\partial(xy_v')}{\partial u}-\frac{\partial(xy_u')}{\partial v}\right)dudv=\iint_{D_0}(x_u'y_v'-x_v'y_u')dudv=\iint_{D_0}\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv.$$ 证毕.