第五次习题课参考解答 含参积分

1. 求解下列各题：

(1) 求极限 $I=\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^1 \dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx.$

解：令 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & 0\le x\le 1,\ 0<y\le 1,\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & 0\le x\le 1,\ y=0.\end{cases}$

则 $f(x,y)\in C(D)$，其中 $D=[0,1]\times[0,1]$. 故

$$I=\lim_{y\to 0^+}\int_0^1\frac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx=\int_0^1\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx=-\int_0^1\frac{de^{-x}}{1+e^{-x}}=\ln\frac{2e}{1+e}.$$

(2) 设 $f(x)=\int_0^x\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]dt$，求 $f'(x)$ 与 $f(x)$.

解: 在闭矩形区域 $|x|\le R,|t|\le R\quad(R>0)$ 中，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]=e^{-x^2}$ 连续，故

$f'(x)=\int_0^x\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]dt+\int_x^x e^{-s^2}ds=\int_0^x e^{-x^2}dt=xe^{-x^2}$ ，又 $f(0)=0$，

因此 $f(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt=\dfrac{1}{2}(1-e^{-x^2})$.

(3) 求 $f'(x)$，其中 $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}e^{x\sqrt{1-y^2}}dy$.

解：
$$\begin{aligned}f'(x)&=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x\sqrt{1-y^2}}\right]dy+e^{x\sqrt{1-\cos^2x}}(-\sin x)-e^{x\sqrt{1-\sin^2x}}(\cos x)\\&=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-y^2}\,e^{x\sqrt{1-y^2}}dy+e^{x\sqrt{1-\cos^2x}}(-\sin x)-e^{x\sqrt{1-\sin^2x}}(\cos x).\end{aligned}$$

2. 试求 $a,\ b$ 之值，使积分 $\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$ 达到最小值。

解：记 $F(a,b)=\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx.$ 积分号下求导，得

$$\begin{cases}F_a'(a,b)=2\int_1^3(a+bx-x^2)dx=0,\\ F_b'(a,b)=2\int_1^3x(a+bx-x^2)dx=0.\end{cases}$$

解方程组得 $\begin{cases}a=-\dfrac{11}{3},\\ b=4.\end{cases}$ 注意到 $F(a,b)$ 是二次函数，且

$$d^2F(a,b)=4da^2+16dadb+\frac{52}{3}db^2=4(da+2db)^2+\frac{4}{3}db^2>0,$$

故 $F(a,b)$ 在极小值点 $a=-\frac{11}{3}$，$b=4$ 处取得最小值。

3. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-x^2}}{x}dx\ (a>0)$.

解：令 $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-x^2}}{x}dx$，对任意的 $a>0,\ \exists[\alpha,\beta]\subset(0,+\infty)\ s.t.\ a\in[\alpha,\beta]$.

因为 $|-xe^{-ax^2}|\le xe^{-\alpha x^2}$，而 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx^2=\frac{1}{2\alpha}$ 收敛，

故 M-判别法知 $\int_0^{+\infty}-xe^{-ax^2}dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛。

因为 $\frac{e^{-ax^2}-e^{-x^2}}{x}$ 与 $\frac{\partial\left(\frac{e^{-ax^2}-e^{-x^2}}{x}\right)}{\partial a}=-xe^{-ax^2}$ 在 $[0,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 连续，

因此积分运算与求导运算可交换顺序，故 $I'(a)=\int_0^{+\infty}-xe^{-ax^2}dx=-\frac{1}{2a}$，

从而 $I(a)=-\frac{1}{2}\ln a+c$. 因为 $I(1)=0$，所以 $c=0$ 且 $I(a)=-\frac{1}{2}\ln a.$

4. 计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x},\quad (|a|<1)$

解：由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}-\frac{\ln(1-a\cos x)}{\cos x}\right)=2a$，

因此这是一个正常积分。注意到

$$\frac{1}{a\cos x}\ln(1+a\cos x)=\int_0^1\frac{dy}{1+ay\cos x},\quad 0\le x<\frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{1}{a\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=2\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x},\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}.$$

$\frac{1}{1-a^2y^2\cos x}$ 在闭矩形区域 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$0\le y\le 1$ 上连续，故

$$I=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x}=2a\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2y^2\cos^2 x}$$
$$=2a\int_0^1 dy\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1-a^2y^2+t^2}\quad (t=\tan x)$$
$$=a\pi\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-a^2y^2}}=\pi\arcsin a.$$

5. 设 $f(t)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+t^2}dx,\quad (0\le t\le 1)$，求 $f_+'(0)$.

解：函数 $\ln\sqrt{x^2+t^2}$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}\ln\sqrt{x^2+t^2}=\frac{t}{x^2+t^2}$ 在 $(0,0)$ 点不连续，

故积分与求导不能交换顺序。下面通过定义求，由于 $f(0)=-1$，且

$$f(t)=\ln\sqrt{1+t^2}-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+t^2}dx=\ln\sqrt{1+t^2}+\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1}dx-1=\ln\sqrt{1+t^2}-1+t\arctan\frac{1}{t}$$

因此 $\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{1}{t}\ln\sqrt{1+t^2}+\arctan\frac{1}{t}\to\frac{\pi}{2}$，$t\to 0^+$. 故 $f_+'(0)=\frac{\pi}{2}$.

思考：若将 t 的范围改为 $-1\le t\le 1$， $f'(0)$ 是否存在？

6. 求定积分 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$

解：由于 $\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ 的原函数不是初等函数，因此不能通过牛顿莱布尼兹公式直接求出积分值。引入变量 α ，令 $I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}dx.$ 【注：引入一个参变量 α ，把这个定积分看成是一个含参定积分在一点处的值，便可根据含参定积分的运算规则，避开求原函数而计算出了其值。这种人为引进参变量的方法，是微积分中一个很有用的技巧。对于收敛的广义积分的计算也是如此，例如计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ ，见第 10 题】

则 $I(1)=I$. 易见 $f(x,\alpha)=\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上满足积分号下求导的条件，于是

$$I'(\alpha)=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}dx=\frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^1\left(\frac{\alpha+x}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\alpha\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln(1+\alpha x)\right)\Bigg|_0^1$$
$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\pi}{4}\alpha+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+\alpha)\right).$$

由此得出

$$I(1)=I(0)+\int_0^1 I^{'}(\alpha)d\alpha=\int_0^1\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\pi}{4}\alpha+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+\alpha)\right)d\alpha$$

$$=(\frac{\pi}{8}\ln(1+\alpha^2)+\frac{1}{2}\ln 2\arctan\alpha)\big|_0^1-I(1),$$

从而$I(1)=\dfrac{\pi}{8}\ln 2.$

7. 计算积分$I(a)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$.

解：由于$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}=a,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}=0$，

故积分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$是定积分。

显然$I(0)=0$，且$I(a)$是奇函数。容易验证，对于上述积分，积分号下求导定理的条件满足。于是我们有$I'(a)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}$. 以下求这个积分。

当$a>0$时，令$u=a\tan x$. 则$dx=\dfrac{adu}{a^2+u^2}$. 于是

$I'(a)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}=\int_0^{+\infty}\frac{adu}{(1+u^2)(a^2+u^2)}$. 由于

$\dfrac{a}{(1+u^2)(a^2+u^2)}=\dfrac{a}{1-a^2}\left(\dfrac{1}{a^2+u^2}-\dfrac{1}{1+u^2}\right)$. 因此不难求出$I'(a)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+a}$.

注意到$I(0)=0$. 于是我们得到$I(a)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$.

又$I(a)$是奇函数。故

$I(a)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a)\ln(1+|a|)$， $\forall a\in(-\infty,+\infty)$.

8. 设$f(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上一阶偏导数存在。若$f_y^{'}(x,y),\ f_{yx}^{''}(x,y)\in C(\mathbf{R}^2)$，证明：

$$f_{xy}^{''}(x,y)=f_{yx}^{''}(x,y),\ (x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

证明：令$F(x,y)=f_y^{'}(x,y),\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$. 因为$f_y^{'}(x,y)\in C(\mathbf{R}^2)$，则对任意的$c,\ y\in\mathbf{R}$，

$$f(x,y)-f(x,c)=\int_c^y F(x,t)dt.$$

注意到$F(x,y)\in C(\mathbf{R}^2)$, 且$F_x^{'}(x,y)=f_{yx}^{''}(x,y)\in C(\mathbf{R}^2)$，故上述含参定积分可积分号下

求导，所以

$$f_x'(x,y)-f_x'(x,c)=\int_c^y F_x'(x,t)dt.$$

再由变上限积分可知，右边关于 y 可导，从而 $f_{xy}''(x,y)=F_x'(x,y)=f_{yx}''(x,y)$. 证毕

9. 已知 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta=1\ \ (0<r<1).$

求 $I(r)=\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta,\quad (0<r\neq 1).$

解：任取 $r_0\in(0,1)$． 由于函数 $\ln(1-2r\cos\theta+r^2)$ 及对 r 的导函数关于 r 在 $[0,r_0]$ 上连续，故

$$I'(r)=\int_0^{2\pi}\frac{2(r-\cos\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta=\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}(1-\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2})d\theta=0.$$

所以 $I(r)=c,\ r\in[0,r_0]$. 由于

$$\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\in C([0,r_0]\times[0,2\pi]),$$

故 $I(r)\in C[0,r_0]$，由于 r_0 的任意性，有 $I(r)=c,\ r\in[0,1)$. 又知 $I(0)=0$，因此 $c=0$ 且

$I(r)=0,\ r\in[0,1).$

现设 $r>1$. 则 $\frac{1}{r}<1$ 且

$$\begin{aligned}0=I(\frac{1}{r})&=\int_0^{2\pi}\ln(1-\frac{2}{r}\cos\theta+\frac{1}{r^2})d\theta=\int_0^{2\pi}\ln\frac{1-2r\cos\theta+r^2}{r^2}d\theta\\&=I(r)-4\pi\ln r,\end{aligned}$$

所以 $I(r)=4\pi\ln r,\ (r>1)$. 解答完毕

======

以下供学有余力的同学选做。

10. 计算 Dirichlet 积分 $D(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ 的值。

解：当 $\alpha=0$ 时，$D(\alpha)=0$；

当 $\alpha>0$ 时，因为 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha$，因此 $\frac{\sin\alpha x}{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界，

又 $|\int_0^t\sin\alpha x dx|=|\frac{1-\cos\alpha t}{\alpha}|\le\frac{2}{\alpha}$，由 Dirichlet 判别法知，无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ 收敛，

而 $D(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}d\alpha x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=D(1)$；若 $\alpha<0$，则 $\alpha=-|\alpha|$，且 $\sin\alpha x=-\sin|\alpha|x$，所以 $D(\alpha)=-D(1)$，这样

$$D(\alpha)=\begin{cases}D(1), & \alpha>0,\\ 0, & \alpha=0,\\ -D(1), & \alpha<0.\end{cases}$$

令 $I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx$ 且 $f(x,y)=e^{-yx}\frac{\sin x}{x}$. 因为 $\lim_{x\to 0}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}=1$，令 $f(0,y)=1$，则 $f(x,y)\in C([0,+\infty)\times[0,n])$，其中 n 是任意的自然数。因为 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛，e^{-yx} 关于 x 单调，且 $|e^{-yx}|\le 1$（关于 y 一致有界），因此由 Able 判别法知 $I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx$ 在 $[0,n]$ 上一致收敛，故 $I(y)$ 在 $[0,n]$ 上连续，从而 $I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. 对任意的 $y_0\in(0,n)$，存在 $\delta>0$ 使得 $[y_0-\delta,y_0+\delta]\subset(0,n)$. 因为 $|e^{-yx}\sin x|\le e^{-(y_0-\delta)x}$，而

$$\int_0^{+\infty}e^{-(y_0-\delta)x}dx=\frac{1}{y_0-\delta}\text{ 收敛，}$$

由 Weirerstrass 判别法知，$\int_0^{+\infty}e^{-yx}\sin xdx$ 在 $[y_0-\delta,y_0+\delta]$ 上一致收敛。又

$$e^{-yx}\sin x\in C([0,+\infty)\times[y_0-\delta,y_0+\delta]),$$

因此由含参无穷积分的可导性，

$$I'(y)=-\int_0^{+\infty}e^{-yx}\sin xdx=-1+\int_0^{+\infty}y^2e^{-yx}\sin xdx,$$

所以对任意的 $y\in(0,n]$， $I'(y)=-\frac{1}{1+y^2}$，从而 $I(y)-I(n)=-\arctan y+\arctan n$，这样 $I(0)=\lim_{y\to 0}I(y)=I(n)+\arctan n$. 因为 $\lim_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$，且

$$|I(n)|\le\int_0^{+\infty}e^{-nx}\frac{|\sin x|}{x}dx\le\int_0^{+\infty}e^{-nx}dx=\frac{1}{n}\to 0\ \ (n\to\infty),$$

因此 $I(0)=\frac{\pi}{2}$. 故 $D(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha.$

解法二、计算无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 的值。【引入参数，两个积分限都是无限区间，用到书上定理 2.3.4】

解：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\sin xdx\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{xy}}dy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^{xy}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{\pi}{2}$，其中

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^{xy}}dx=-\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{xy}}d\cos x=-\frac{\cos x}{e^{xy}}\Big|_0^{+\infty}-y\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{e^{xy}}dx=1-y\int_0^{+\infty}\frac{d\sin x}{e^{xy}}$$
$$=1-\frac{\sin x}{e^{xy}}\Big|_0^{+\infty}-y^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^{xy}}dx=1-y^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^{xy}}dx$$

所以$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^{xy}}dx=\frac{1}{1+y^2}$.

11. 计算两个 Laplace 积分：

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$$

解：

当$\delta>0$时，因为$\left|\int_0^A\sin\beta x dx\right|\le\frac{2}{\delta}$，并且$\frac{x}{x^2+\alpha^2}$在$\beta\in[\delta,+\infty)$上单调一致收敛趋于零，由 Dirichlet 判别法，积分$J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$在$\beta\in[\delta,+\infty)$上一致收敛。

$$I'(\beta)=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx\text{ 。}$$

$$I'(\beta)+\frac{\pi}{2}=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x\left(x^2+\alpha^2\right)}dx$$

由于$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$对于$\beta\in[\delta,+\infty)$一致收敛，

$\left[I'(\beta)+\frac{\pi}{2}\right]'=\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$，即：$I''(\beta)=\alpha^2 I(\beta)$。

由此，我们得到：$I(\beta)=C_1e^{\alpha\beta}+C_2e^{-\alpha\beta}$ 。

又因为：$|I(\beta)|\le\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$，所以$\lim_{\alpha\to+\infty}I(\beta)=0$，代回到上面$I(\beta)$的表达式中，我们有$C_1=0$，因此$I(\beta)=C_2e^{-\alpha\beta}$ 。

最后，考虑到$\lim_{\beta\to0^+}I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$，推出$C_2=\frac{\pi}{2\alpha}$，

即：$I(\beta)=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$ 。

而当$\beta>0$时，$J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx=-I'(\beta)=-\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$，因此，一般地：

因而$J(\beta)=-\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}\operatorname{sgn}\beta$ 。

12. 计算下面的含参广义积分（注：$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$）.

计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$ 。

令：$I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$ ，

$I'(\beta) = -\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} \sin 2\beta x dx$，对于 $\beta \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛。因此：

$I'(\beta) = \int_0^{+\infty} \sin 2\beta x d e^{-x^2} = -\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot 2\beta \cos 2\beta x dx = -2\beta I(\beta)$,

求得：$I(\beta) = Ce^{-\beta^2}$，再利用 $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

我们有：$I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2}$，即：$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2}$ 。