第二次习题课解答(复合函数链式法则、高阶偏导数、方向导数)

多元函数一阶微分形式的不变性：

设 $z = f(u,v),\ u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ 均连续可微，则将 z 看成 x,y 的函数，有

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\,.$$

另一方面，由复合函数的链式法则，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\,,$$

代入 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 中，得

$$\begin{aligned}dz&=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\\&=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\end{aligned}$$

称 $dz=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$ 为一阶微分的形式不变性，即 u,v 无论作为 z 的中间变量，还是作为 z 的自变量，都有 $dz=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$ 成立。

1．设 f 可微，且 $z=x^3 f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：$dz=f\cdot 3x^2dx+x^3df=3x^2 fdx+x^3\left[f_1' d(xy)+f_2' d\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

$$=3x^2 fdx+x^3\left[f_1'(xdy+ydx+f_2'\,\frac{xdy-ydx}{x^2}\right]$$

$$=\left(3x^2 f+x^3yf_1'-xyf_2'\right)dx+\left(x^4 f_1'+x^2 f_2'\right)dy$$

由一阶微分的形式不变性，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(3x^2 f+x^3yf_1'-xyf_2'\right)dx+\left(x^4 f_1'+x^2 f_2'\right)dy$$

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(3x^2 f+x^3 y f_1'-xyf_2'\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x^4 f_1'+x^2 f_2'\right)$.

其中符号 f_1'，f_2' 分别表示函数 $f(x,y)$ 分别对第一个中间变量和第二个中间变量求偏导。

2. 设 $g(x)=f\left(x,\phi\left(x^2,x^2\right)\right)$，其中函数 f 和 ϕ 的二阶偏导数连续，求 $\dfrac{d^2 g(x)}{dx^2}$.

解：由 $g(x)=f\left(x,\phi\left(x^2,x^2\right)\right)$ 两边对 x 求导，得

$$\frac{dg(x)}{dx}=f_x'\left(x,\phi\left(x^2,x^2\right)\right)+2f_\phi'\left(x,\phi\left(x^2,x^2\right)\right)\left(\phi_1'\left(x^2,x^2\right)+\phi_2'\left(x^2,x^2\right)\right)x\,,$$

两边再对 x 求导，得

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2}=f_{xx}''+4f_{x\phi}''(\phi_1'+\phi_2')x+4f_{\phi\phi}''(\phi_1'+\phi_2')^2x^2+4f_\phi'(\phi_{11}''+2\phi_{12}''+\phi_{22}'')x^2+2f_\phi'(\phi_1'+\phi_2'),$$

其中符号 ϕ_1', ϕ_2' 分别表示 ϕ 对其第一个中间变量和第二个中间变量求偏导。

3. 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程 $A\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，其中 A,B,C 都是非零常数。若令 $\begin{cases}u=x+\alpha y\\ v=x+\beta y,\end{cases}$ 试确定 α,β 为何值时原方程可转化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

解：因为 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，因此二阶混合偏导与求偏导顺序无关。将 x,y 看成自变量，u,v 看成中间变量，利用链式法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

由$0=A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$得到

$$\left(A+2B\alpha+C\alpha^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\left(A+B\left(\alpha+\beta\right)+C\alpha\beta\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(A+2B\beta+C\beta^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0 \quad \cdots(*)$$

故只要选取α,β使得

$$\begin{cases}A+2B\alpha+C\alpha^2=0\\ A+2B\beta+C\beta^2=0,\end{cases}$$

即得$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$．这样问题转化为方程$A+2Bt+Ct^2=0$有两不同实根，即要求$B^2-AC>0$．取$\alpha=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{C}$，$\beta=\frac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{C}$．将其代入方程(*)，可知$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$的系数不为零，从而$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

4．设$u(x,y)\in C^2$，又$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$，求

$u''_{xx}(x,2x)$，$u''_{xy}(x,2x)$，$u''_{yy}(x,2x)$.

解：因为$\frac{\partial u}{\partial x}(x,2x)=x^2$，两边对$x$求导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,2x)\cdot 2=2x. \qquad (1)$$

由$u(x,2x)=x$，两边对x求导，得 $\frac{\partial u}{\partial x}(x,2x)+\frac{\partial u}{\partial y}(x,2x)\cdot 2=1$,

所以，$\frac{\partial u}{\partial y}(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}$．此式两边再对$x$求导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)\cdot 2=-x. \qquad (2)$$

由已知，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)=0$, （3）

因为$u(x,y)\in C^2$，因此$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,2x)$.

联立（1），（2），（3)解得:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)=-\frac{4}{3}x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)=\frac{5}{3}x.$$

5．设 $z(x,y)$ 是定义在矩形区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le a,0\le y\le b\}$ 上的可微函数。证明:

（1） $z(x,y)=f(y)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$；

（2） $z(x,y)=f(y)+g(x)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$.

证明: (1) “$\Rightarrow$”显然.

“$\Leftarrow$” 任取 $x_0\in[0,a]$. 任意固定 $y\in[0,a]$，关于 x 的一元函数 $z(x,y)$ 在以 x 与 x_0 为端点的区间上应用微分中值定理，则存在 ξ 使得

$z(x,y)-z(x_0,y)=\frac{\partial z}{\partial x}(\xi,y)(x-x_0)=0,$ 这样 $z(x,y)=z(x_0,y)$，故

$z(x,y)=f(y)$ 与 x 无关.

(2) $\Rightarrow$: 显然.

$\Leftarrow$: 因为 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=h(y)$ 与 x 无关. 故

$z(x,y)=\int h(y)dy+g(x)=f(y)+g(x).$

6．计算下列各题：

(1) 已知 $z=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$.

解： 令 $u=\frac{y}{x},\ v=\frac{x}{y}$, 则 $z=u^v$. 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{1}{y}u^v\ln u.$$

因为$u(1,2)=2,\ v(1,2)=\frac{1}{2}$，因此$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\frac{\ln 2-1}{\sqrt{2}}$.

（2） 设 $f(u,v)\in C^2$ 且 $z=f(e^{x+y},xy)$． 求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解： 令$u=e^{x+y}$，$v=xy$， 则$z=f(u,v)$．由复合函数的链式法则，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x+y}\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{x+y}\frac{\partial f}{\partial u}+e^{x+y}(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}e^{x+y}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u})+\frac{\partial f}{\partial v}+y(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}e^{x+y}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})$$

$$=e^{x+y}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}+e^{x+y}(x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}e^{2(x+y)}+yx\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

（3） 设函数 f 二阶可导，函数 g 一阶可导． 令

$$z(x,y)=f(x+y)+f(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}g(t)dt.$$ 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：由复合函数求导法则及变限积分求导，可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x+y)+f'(x-y)+g(x+y)-g(x-y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(x+y)-f'(x-y)+g(x+y)+g(x-y),$$

所以$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x+y)+f''(x-y)+g'(x+y)-g'(x-y)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(x+y)+f''(x-y)+g'(x+y)-g'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''(x+y)-f''(x-y)+g'(x+y)+g'(x-y).$$

7．设n为整数，若对任意的$t>0$，$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，则称 f 是n次齐次函数。

证明：可微函数 $f(x,y)$ 是零次齐次函数的充要条件是$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$

证明：先证必要性。设可微函数 $f(x,y)$ 是零次齐次函数，即

$$f(tx,ty)=f(x,y)\ (\forall t>0). \qquad (4)$$

若 f 在坐标原点处有定义，则由 f 的连续性可知 $f(x,y)=f(0,0),\ (\forall(x,y))$. 结论显然成立。

现在假设 f 在坐标原点处没有定义。则由复合函数的链式法则，方程(4)两边分别对 t 求导，得 $x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=0$. 令 $t=1$，即得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

必要性得证。

下证充分性。设 $f(x,y)$ 满足 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$ 令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta.$ 则

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta=\frac{1}{r}(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})=0.$$

上式说明 f 在极坐标系中只是 $\theta=\arctan\frac{y}{x}$ 的函数，这等价于只是 $\frac{y}{x}$ 的函数。可记 $f(x,y)=\phi(\frac{y}{x})$. 显然 ϕ 是零次齐次函数。

充分性证法二、任取 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，并令 $\vec{r}=(x,y)$. 因为 $xf_x'+yf_y'=0,$ 因此

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial\vec{r}}=\frac{1}{\|\vec{r}\|}(xf_x'+yf_y')=0,$$

即 f 沿着任意方向的方向导数都等于零，从而 f 沿着任意方向的函数值不变。故在极坐标系中，由原点出发的任一射线上函数值相等。所以在极坐标系中 f 只是 θ 的函数。

8. 设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微。已知 $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$， $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$，且 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{v}}=2$， $\frac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{u}}=1$，求 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的微分。

解：因为 $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}=(1,-1)$， $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}=(-1,2)$，且 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，因此

$$2=\frac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{v}}=(f_x^{'}(P_0),f_y^{'}(P_0))\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}(f_x^{'}(P_0)-f_y^{'}(P_0)),$$

$$1=\frac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{u}}=(f_x^{'}(P_0),f_y^{'}(P_0))\cdot(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})=\frac{1}{\sqrt{5}}(-f_x^{'}(P_0)+2f_y^{'}(P_0)),$$

由此解出 $f_x^{'}(P_0)=4\sqrt{2}+\sqrt{5}$，$f_y^{'}(P_0))=2\sqrt{2}+\sqrt{5}$. 所以 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的微分

$$df(P_0)=(4\sqrt{2}+\sqrt{5})dx+(2\sqrt{2}+\sqrt{5})dy.$$

9. 设 $f(x,y)$ 为可微函数，$\vec{l}_1$，$\vec{l}_2$ 是$\mathbb{R}^2$上的一组线性无关的向量。试证：$f(x,y)$ 在任一点 $P(x,y)$ 沿任意向量 $\vec{l}$ 的方向导数 $f_{\vec{l}}^{'}(P)$ 必定能用 $f_{\vec{l}_1}^{'}(P)$ 与 $f_{\vec{l}_2}^{'}(P)$ 线性表示。

证明：令 $\vec{l}_1=(\cos\alpha_1,\cos\beta_1)$，$\vec{l}_2=(\cos\alpha_2,\cos\beta_2)$.

因为 $f(x,y)$ 可微，故

$$\begin{cases} f_{\vec{l}_1}^{'}(P)=f_x^{'}(P)\cos\alpha_1+f_y^{'}(P)\cos\beta_1=d_1 \\ f_{\vec{l}_2}^{'}(P)=f_x^{'}(P)\cos\alpha_2+f_y^{'}(P)\cos\beta_2=d_2. \end{cases}$$

由于 $\vec{l}_1$，$\vec{l}_2$ 线性无关，因此由上式解出 $\begin{pmatrix} f_x^{'}(P) \\ f_y^{'}(P) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$

于是，对任意的向量 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，

$$\begin{aligned} f_{\vec{l}}^{'}(P)&=f_x^{'}(P)\cos\alpha+f_y^{'}(P)\cos\beta=(\cos\alpha,\ \ \cos\beta)\begin{pmatrix} f_x^{'}(P) \\ f_y^{'}(P) \end{pmatrix} \\ &=(\cos\alpha,\ \ \cos\beta)\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &=(a,\ b)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $(a,\ b)=(\cos\alpha,\ \ \cos\beta)\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \end{pmatrix}^{-1}$.

10. 设 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$，$P_0(1,1)$. 试求 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}$，并问：在怎样的方向 $\vec{l}$ 上，方向导数 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}$ 分别有最大值、最小值和零值。

解：因为 $f(x,y)$ 可微，且 $f_x^{'}(P_0)=(2x-y)|_{(1,1)}=1$，$f_y^{'}(P_0)=(2y-x)|_{(1,1)}=1$，

因此对任意的单位向量$\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，$\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}=\cos\alpha+\cos\beta.$

当$\vec{l}=(1,1)$是梯度方向时，$\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}=\sqrt{2}$达到最大；

当$\vec{l}=(-1,-1)$时，$\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}=-\sqrt{2}$达到最小；

当$\vec{l}=(1,-1)$或$\vec{l}=(-1,1)$时，即$\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}$时，$\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}=0$.

11. 设a,b是实数，函数$z=2+ax^2+by^2$在点$(3,4)$处的方向导数中，沿$\vec{l}=(-3,-4)$的方向导数最大，最大值为10，求a,b.

解：因为函数可微，我们有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,4)}=6a,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,4)}=8b,$$

且函数沿着梯度方向的方向导数达到最大，因此梯度单位向量

$$\vec{l}^{\circ}=\frac{1}{5}(-3,-4)=(\frac{6a}{10},\frac{8b}{10}).$$

从而$\begin{cases}\dfrac{6a}{10}=-\dfrac{3}{5}\\ \dfrac{8b}{10}=-\dfrac{4}{5},\end{cases}$ 故$\begin{cases}a=-1\\ b=-1.\end{cases}$

12. 设$f(x,y)\in C^2(\mathbf{R}^2)$满足$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$，且$f(x,0)>0.$

试证明：对任意的$(x,y)\in\mathbf{R}^2$，有$f(x,y)>0.$

证明：令$\vec{l}=(1,-1)$. 则对任意的$(x,y)\in\mathbf{R}^2$，因为$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$，

所以$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial\vec{l}}=0$，即函数$f(x,y)$在任意一点沿方向$\vec{l}=(1,-1)$的方向导数为零，

故函数$f(x,y)$在该方向$\vec{l}=(1,-1)$上是常数，即在直线$x+y=c$上$f(x,y)$是常数。

对任意的点$(x,y)\in\mathbf{R}^2$，总存在直线$L:x+y=c$使得$(x,y)\in L$，所以

$f(x,y)=f(c,0)>0$.

13. 设 $f(x,y)$ 在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上具有连续的偏导数，$L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$（$a\le t\le b$）是 D 中的光滑曲线，L 的端点为 $A,\ B$． 证明：若 $f(A)=f(B),$ 则存在点 $P_0(x_0,y_0)\in L$ 使得 $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}=0,$ 其中 $\vec{l}$ 是曲线 L 在 P_0 的单位切向量。

证明：令 $g(t)=f(x(t),y(t)),\ a\le t\le b.$ 不妨设 $A,\ B$ 分别对应着 $t=a,\ t=b.$ 则由条件可知 $g(t)$ 可导，且 $g(a)=g(b).$ 由罗尔定理，存在 $\mu\in(a,b)$ 使得 $g'(\mu)=0.$

故 $g'(\mu)=f'_x(x(\mu),y(\mu))x'(\mu)+f'_y(x(\mu),y(\mu))y'(\mu)=0$.

取 $x_0=x(\mu),\ y_0=y(\mu).$ 则 $P_0(x_0,y_0)\in L$. 令 $\vec{l}=\dfrac{(x'(\mu),y'(\mu))}{\sqrt{x'(\mu)^2+y'(\mu)^2}}$,

所以 $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}=f'_x(x(\mu),y(\mu))\dfrac{x'(\mu)}{\sqrt{x'(\mu)^2+y'(\mu)^2}}+f'_y(x(\mu),y(\mu))\dfrac{y'(\mu)}{\sqrt{x'(\mu)^2+y'(\mu)^2}}=0.$