第九次习题课讨论题：曲面积分、Gauss 公式和 Stokes 公式的应用

1．计算$\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$．其中$S$是锥体$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$的边界.

解：分别记S_1和S_2为锥体的侧面和上底面，则

$\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$

在S_1上，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}\mathrm{dxdy}$（$z=\sqrt{x^2+y^2}$）.

在S_2上，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{dxdy}=dxdy$（$z=1$）．于是

$\iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot\sqrt{2}r\mathrm{d}r=\pi/\sqrt{2}$，

$\iint_{S_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\pi/2$．

于是所求面积分为 $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S=\pi(1/2+1/\sqrt{2})$．解答完毕。

2．求$I=\iint\limits_S (x+y+z)^2\,dS$，其中$S$为球心在坐标原点的单位球面.

解：$I=\iint\limits_S (x+y+z)^2\,dS=\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)dS$

$=\iint\limits_S (1+2xy+2yz+2zx)dS=4\pi+2\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS$

其中4π是球的表面积．由对称性可知，$\iint\limits_S xydS=\iint\limits_S yzdS=\iint\limits_S zxdS=0$，故$I=4\pi$.

解答完毕。

3．计算第一型曲面积分$I=\iint\limits_S |z|dS$，以及第二型曲面积分$J=\iint\limits_{S^+}|z|dx\wedge dy$，其中曲面$S$为球面$S:x^2+y^2+z^2=a^2$，定向曲面$S^+$的正法向向外。

解：分别记S_1，S_2为S的上半球面和下半球面，它们的方程为

S_1：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D=\{(x,y),\ x^2+y^2\le a^2\}$，$S_1^+$方向向上。

S_2：$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D$，S_2^+方向向下。

考虑第一型曲面积分I．由球面的对称性，

我们有$\iint\limits_{S_1}|z|dS=\iint\limits_{S_2}|z|dS$．因此$I=\iint\limits_S |z|dS=\iint\limits_{S_1}|z|dS+\iint\limits_{S_2}|z|dS=2\iint\limits_{S_1}zdS$.

对于上半球面S_1，面积微元$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\frac{a\,dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$．于是

$$I=2\iint\limits_{S_1}zdS=2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=2a\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}dxdy=2\pi a^3.$$

考虑第二型曲面积分J.

$J=\iint\limits_{S^+}|z|dx\wedge dy=\iint\limits_{S_1^+}|z|dx\wedge dy+\iint\limits_{S_2^+}|z|dx\wedge dy$.

注意到 $\iint\limits_{S_1^+} |z|\,dx\wedge dy = \iint\limits_{S_1} z\cdot\dfrac{z}{a}dS = \dfrac{1}{a}\iint\limits_{S_1} z^2 dS,$

$\iint\limits_{S_2^+} |z|\,dx\wedge dy = \iint\limits_{S_2} -z\cdot\dfrac{z}{a}dS = -\dfrac{1}{a}\iint\limits_{S_2} z^2 dS,$

故 $J = \iint\limits_{S^+} |z| dx\wedge dy = \iint\limits_{S_1^+} |z| dx\wedge dy + \iint\limits_{S_2^+} |z| dx\wedge dy = 0$. 解答完毕。

4． 记 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截的有限部分。规定曲面 S 的正向向下，所得的定向曲面记为 S^+． 求下面两个积分的值。

（i） $\iint\limits_S zdS$. （ii） $\iint\limits_{S^+} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy\right)$.

解：（i） 简单计算知锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的面积微元为 $dS=\sqrt{2}dxdy$． 因此

$$\iint\limits_S zdS = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2x} \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \frac{32\sqrt{2}}{9}.$$

（ii） 不难计算曲面 S 的单位正法向量为 $(x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2}, -1)/\sqrt{2}$.
将第二型曲面积分转化为第一型曲面积分，有

$$\iint\limits_{S^+} \sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy)$$

$$= \iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)dS = \iint\limits_S 0dS = 0.$$ 解答完毕。

5．求积分 $I = \iint\limits_{\Sigma^+} f(x)dy\wedge dz + g(y)dz\wedge dx + h(z)dx\wedge dy$ ，其中 Σ^+ 为长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的边界，正法向朝外，函数 $f(x)$, $g(y)$ 和 $h(z)$ 均为连续函数。

解：边界面 Σ 由 6 个平面构成，其朝外的单位法向量分别为：

$x=0$： $\mathbf{n}=(-1,0,0)$ ， $x=a$ ： $\mathbf{n}=(1,0,0)$ ，

$y=0$： $\mathbf{n}=(0,-1,0)$ ， $y=b$ ： $\mathbf{n}=(0,1,0)$ ，

$z=0$： $\mathbf{n}=(0,0,-1)$ ， $z=c$ ： $\mathbf{n}=(0,0,1)$ ，

所以 $\iint\limits_\Sigma f(x)dy\wedge dz = \iint\limits_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}} f(a)dydz - \iint\limits_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}} f(0)dydz = bc[f(a)-f(0)]$.

同理 $\iint\limits_\Sigma g(y)dz\wedge dx = \iint\limits_{\substack{0\le z\le c\\0\le x\le a}} g(b)dzdx - \iint\limits_{\substack{0\le z\le c\\0\le x\le a}} g(0)dzdx = ac[g(b)-g(0)]$,

$$\iint\limits_\Sigma h(z)dx\wedge dy = \iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}} h(c)dxdy - \iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}} h(0)dzdx = ab[h(c)-h(0)].$$

因此 $I = bc[f(a)-f(0)] + ca[g(b)-g(0)] + ab[h(c)-h(0)]$. 解答完毕。

6．设 S^+ 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 位于 $0\le z\le \mathrm{h}$ 的部分，正法向向下。设 $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 为流体运动的速度场。求流体在单位时间里通过定向曲面 S 由内向外的流量 Q，即求曲面积分 $Q=\iint\limits_{S^+}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$.

解：曲面（锥面）S 的指定方向的单位正法向量 $\mathbf{n}=\dfrac{(x,y,-z)}{\sqrt{2}z}$. 于是所求流量为

$$Q=\iint\limits_{S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}=\iint\limits_{S}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS=\iint\limits_{S}(x,y,z)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}z}(x,y,-z)dS==\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{S}\frac{x^2+y^2-z^2}{z}dS=0\cdot$$

解答完毕。

7．记 S^+ 为圆柱面 $S:x^2+y^2=1$ 位于 $0\le z\le 2$ 的部分，外法向为正，计算曲面积分

$$I=\iint_{S^+}x(y-z)dy\wedge dz+(x-y)dx\wedge dy.$$

解：记立体 $\Omega: x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 2$；$S_1^+: x^2+y^2\le 1$，$z=0$，正法向向下；

$S_2^+: x^2+y^2\le 1$，$z=2$，正法向向上。根据 Gauss 公式得

$$\iint_{(\partial\Omega)^+}x(y-z)dy\wedge dz+(x-y)dx\wedge dy=\iiint\limits_{\Omega}(y-z)dxdydz=-\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^2 zdz=-2\pi.$$

而 $\iint_{(\partial\Omega)^+}x(y-z)dy\wedge dz+(x-y)dx\wedge dy=\iint_{S^++S_1^++S_2^+}x(y-z)dy\wedge dz+(x-y)dx\wedge dy$，

其中，

$$\iint_{S_1^+}x(y-z)dy\wedge dz+(x-y)dx\wedge dy=\iint_{S_1}\big(x(y-z),0,(x-y)\big)\cdot\big(0,0,-1\big)dS$$

$$=-\iint_{S_1}(x-y)dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(y-x)dxdy=0,$$

$$\iint_{S_2^+}x(y-z)dy\wedge dz+(x-y)dx\wedge dy=\iint_{S_2}\big(x(y-z),0,(x-y)\big)\cdot\big(0,0,1\big)dS$$

$$=\iint_{S_2}(x-y)dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x-y)dxdy=0,$$

所以 $I=\iint_{S^+}x(y-z)dy\wedge dz+(x-y)dx\wedge dy=-2\pi.$ 解答完毕。

8. 设 Ω 为由圆锥面 $S:x^2+y^2=z^2$ 和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体。

证明：圆锥体的体积 $V=\dfrac{Sh}{3}$，其中 S 为圆锥的底面积，h 为圆锥的高。

证明：由于$\partial\Omega = S_1 \cup S_2$，其中$S_1$记锥面部分，$S_2$记底面部分．因为锥面的顶点在原点，其上每一点的法向量与径向垂直，故$\iint\limits_{S_1}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS = 0$，其中$\mathbf{n}^0$为锥面$S_1{}^+$的单位正法向量。

S_2为平面$Ax+By+Cz+D=0$的一部分，其单位法向量为$\dfrac{\pm(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$．注意到在$S_2$上，点的位置向量与正法向成锐角。因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS &= \iint\limits_{S_2}\left|(x,y,z)\cdot\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS \\ &= \iint\limits_{S_2}\left|\frac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS = \iint\limits_{S_2}\left|\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|dS \\ &= \left|\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\iint\limits_{S_2}dS = Ah\end{aligned}$$

其中$S=\iint\limits_{S_2}dS$为圆锥的底面积，而$h=\left|\dfrac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$为原点到平面

$Ax+By+Cz+D=0$的距离，也就是圆锥的高．故

$V=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=\dfrac{1}{3}\left(\iint\limits_{S_1}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS+\iint\limits_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS\right)=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)dS=\dfrac{Sh}{3}$．解答完毕。

9．设一元函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续可导，且对于任何位于半空间$R_x^+=\{(x,y,z),\quad x>0\}$中的光滑有向封闭曲面$S\subset R_x^+$，有$\oiint\limits_S xf(x)dy\wedge dz - xyf(x)dz\wedge dx - e^{2x}zdx\wedge dy = 0$．进一步假设$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，求$f(x)$．

解：对于$\forall(x_0,y_0,z_0)\in R_x^+$．作以$(x_0,y_0,z_0)$为球心，以$r>0$为半径的闭球$B_x$使得$B_r\subset R_x^+$．于是由假设得$\oiint\limits_{\partial B_r} xf(x)dy\wedge dz - xyf(x)dz\wedge dx - e^{2x}zdx\wedge dy = 0$．

故据 Gauss 公式，有$\iiint\limits_{B_r}\left(\dfrac{\partial(xf(x))}{\partial x}+\dfrac{\partial(-xyf(x))}{\partial y}+\dfrac{\partial(-e^{2x}z)}{\partial z}\right)dxdydz=0$，

即$\iiint\limits_{B_r}[xf'(x)+(1-x)f(x)-e^{2x}]dxdydz=0$．

再根据三重积分的积分中值定理可知，

存在$\xi\in[x_0-r,x_0+r]$，使得$\xi f'(\xi)+(1-\xi)f(\xi)-e^{2\xi}=0$．

令$r\to 0^+$即得$x_0 f'(x_0)+(1-x_0)f(x_0)-e^{2x_0}=0$．

由于$x_0>0$是任意的，故$xf'(x)+(1-x)f(x)-e^{2x}=0$，$\forall x>0$．

这是一阶线性常微分方程，求得其通解为$f(x)=\dfrac{e^x}{x}(c+e^x)$．

由假设 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，可得 $c=-1$．因此 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}\left(e^x-1\right)$．解答完毕。

10. 利用 Stokes 公式计算积分 $I=\oint\limits_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 L^+ 为圆周

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y=x\tan\alpha \quad \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

从 ox 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向。

解：记 S^+ 为由圆周 L^+ 在平面 $y=x\tan\alpha$ 上所围的部分（闭圆盘），其正法向与 x 轴正向成锐角。由 Stokes 公式得

$$I=\oint\limits_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=\iint\limits_{S}-2(1,1,1)\cdot\mathbf{n}^0dS$$

其中 $\mathbf{n}^0$ 为 S^+ 的单位正法向量。由假设知 $\mathbf{n}^0=(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)$.

于是 $I=-2\iint\limits_{S}(1,1,1)\cdot(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)dS=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\iint\limits_{S}dS=2\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha)$，

其中 $\iint\limits_{S}dS=\pi a^2$ 为平面 $y=x\tan\alpha$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 部分内的面积。解答完毕。

11. 设有向曲线 L^+ 是平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，从 z 轴正向看去为逆时针方向。求第二型曲线积分 $I=\int\limits_{L^+}\dfrac{(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz}{x^2+y^2+z^2}$.

解：首先注意 $I=\int\limits_{L^+}(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz$.

记 S^+ 为平面 $x+y+z=0$ 上包含于球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 内的部分，且 S^+ 的正法向与 z 轴的正向成锐角。根据 Stokes 公式得 $I=-\iint\limits_{S^+}dy\wedge dz+dz\wedge dx+dx\wedge dy$. 注意到 S 的单位正法向 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. 于是 $I=-\iint\limits_{S}(1,1,1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)dS=-\sqrt{3}\iint\limits_{S}dS=-\sqrt{3}\pi$. 解答完毕。

12. 设 Σ^+ 是锥面的一部分：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$0\le z\le 1$，规定其正法线向下，求曲面积分

$I=\iint_{\Sigma^+}xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy$.

解：设单位圆盘 $\sum_1^+$：$x^2+y^2\le 1$，$z=1$，正法线向上。记由锥面 Σ^+ 和圆盘 Σ_1^+ 所围成的立体为 Ω. 应用 Gauss 公式得

$$\iint_{\Sigma^++\Sigma_1^+}xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy=\iiint\limits_{\Omega}6dxdydz=6V(\Omega)=2\pi.$$

而积分 $\iint_{\Sigma_1^+} xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy=\iint_{\Sigma_1}3(z-1)dS=0.$

因此 $I=\iint_{\Sigma^+} xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy=2\pi$. 解答完毕。

13．计算高斯积分 $I=\iiint\limits_S \dfrac{\cos\langle\vec{r},\vec{n}\rangle}{r^2}dS$，其中 S 为一个不经过原点的光滑封闭曲面，其中 $\vec{n}$ 为 S 上点 (x,y,z) 处的外单位法向量，$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解：记 $\vec{V}=\vec{r}/r^3=(x,y,z)/r^3$．则 $I=\iiint\limits_S \dfrac{\cos\langle\vec{r},\vec{n}\rangle}{r^2}dS=\oiint\limits_S \dfrac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\oiint\limits_S \vec{V}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$．当 S 不包围坐标原点时，向量值函数 $\vec{V}$ 在由 S 所包围的闭区域内连续可微。因此利用 Gauss 公式可得曲面积分 $\iint\limits_S \vec{V}\cdot ndS=0$. 当 S 包含围坐标原点时，原积分等于向量值函数 $\vec{V}$ 沿着球面 $\Sigma^+: x^2+y^2+z^2=\delta^2$（外侧）上的第二型曲面积分．于是

$$I=\oiint\limits_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma^+}\vec{V}\cdot\vec{n}dS=\oiint\limits_{\Sigma^+}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{\vec{r}}{r}dS=\frac{1}{\delta^2}\oiint\limits_{\Sigma}dS=4\pi.$$ 解答完毕。

14. 设 Σ^+ 为曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧，求 $\iint\limits_{\Sigma^+} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

解：设 $\sum_1=\left\{(x,y,x)\,|\,3y^2+3z^2\le 1, x=0\right\}$，方向指向 x 轴负向。

则由 Gauss 公式

$$\iint\limits_{\Sigma^++\Sigma_1^+} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega:0\le x\le\sqrt{1-3y^2-3z^2}}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

设 $y=r\cos\theta,\ z=r\sin\theta$，则

$$\iiint\limits_{\Omega:0\le x\le\sqrt{1-3y^2-3z^2}}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}(1+3r^2)rdr\int_0^{\sqrt{1-3r^2}}dx=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}r(1+3r^2)\sqrt{1-3r^2}dr,$$

令 $\sqrt{1-3r^2}=t$，则 $2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}r(1+3r^2)\sqrt{1-3r^2}dr=\dfrac{2\pi}{3}\int_0^1(2-t^2)t^2dt=\dfrac{14\pi}{45}$.

又 $\iint\limits_{y^2+z^2\le\frac{1}{3},x=0} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$，

因此 $\iint\limits_{\Sigma^+} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\dfrac{14\pi}{45}$.

15. 设 Σ^+ 是曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外侧，计算曲面积分

$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma^+}(x-y+z)dy\wedge dz+(y-z+x)dz\wedge dx+(z-x+y)dx\wedge dy.$$

解：设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|\le 1\}.$

由 Gauss 公式，$I=\iiint_{\Omega}3dxdydz.$

令$\begin{cases}u=x-y+z\\ v=y-z+x\\ w=z-x+y,\end{cases}$ 则$\det\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}=4$，

从而$\det\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\dfrac{1}{4}$ 且$I=\iiint_{|u|+|v|+|w|\le 1}\dfrac{3}{4}dudvdw=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{8}{6}=1.$

其中八面体$|u|+|v|+|w|\le 1$的体积为$\dfrac{8}{6}$.

16. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=2z$，计算曲面积分$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(ax^2+by^2+cz^2)dS.$

解：设Σ^+是球面$x^2+y^2+(z-1)^2=1$的外侧，则其外单位法向量$\vec{n}=(x,y,z-1)$.

将曲面积分变形：

$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(ax^2+by^2+cz^2)dS=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(ax\cdot x+by\cdot y+cz(z-1))dS+\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}c(z-1)dS+\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}cdS.$$

将第一型曲面积分转化为第二型曲面积分，并利用 Gauss 公式，

记$\Omega=\{(x,y,z)\,|\;\;x^2+y^2+z^2\le 2z\}$，则

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(ax\cdot x+by\cdot y+cz(z-1))dS=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma^+}axdy\wedge dz+bydz\wedge dx+czdx\wedge dy$$

$$=\iiint_{\Omega}(a+b+c)dxdydz=\frac{4}{3}\pi(a+b+c).$$

又$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}c(z-1)dS=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma^+}cdx\wedge dy=\iiint_{\Omega}0dxdydz=0,\ \ \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}cdS=4\pi c.$

故$I=\dfrac{4}{3}\pi(a+b+4c).$