第三次习题课：隐函数微分、多元函数微分学几何应用

1．计算下列各题：

(1) 已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 决定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解：方程 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 两边分别对 $x,\ y$ 求偏导，

得 $2x + 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$， $2y + 2z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$，

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{z}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{z}$，这样 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{y}{z^2} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{xy}{z^3}$.

(2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(z + y)^x = x^2 y$ 确定，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,3)}$.

解：将 $x = 3,\ y = 3$ 带入方程 $(z + y)^x = x^2 y$，解得 $z = 0$.

方程 $(z + y)^x = x^2 y$ 两端关于 y 求偏导，得 $x(z + y)^{x-1}(\dfrac{\partial z}{\partial y} + 1) = x^2$，

将 $x = 3,\ y = 3,\ z = 0$ 带入上式，得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,3)} = -\dfrac{2}{3}$.

(3) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 确定，且 $z(1,0) = -1$，求 $\left.dz\right|_{(1,0)}$.

解：方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 两边微分，则

$$yzdx + xzdy + xydz + \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

将 $(x, y, z) = (1, 0, -1)$ 带入上式，有 $\left.dz\right|_{(1,0)} = dx - \sqrt{2}dy.$

2. 设函数 $x = x(z),\ y = y(z)$ 由方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dx}{dz},\ \dfrac{dy}{dz}$.

解:令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$，$G(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 1$，则当 $xy \neq 0$ 时，

$\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$ 可逆，故方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0 \end{cases}$ 确定了隐函数组

$x = x(z),\ y = y(z)$，且

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dz} \\ \dfrac{dy}{dz} \end{bmatrix} = -\left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4xy}\begin{bmatrix} 4y & -2y \\ -2x & 2x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2z \\ -2z \end{bmatrix} = -\frac{1}{4xy}\begin{bmatrix} 12yz \\ -8xz \end{bmatrix}$$

由此得到 $\dfrac{dx}{dz} = -\dfrac{3z}{x},\ \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{2z}{y}$.

3. 已知函数 $z=z(x,y)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\\ z=uv\end{cases}$ 给定，试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：这个问题涉及到复合函数微分法与隐函数微分法. 因变量 z 以 u,v 为中间变量，u,v 又分别是由方程组 $\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\end{cases}$ 确定的 x,y 的隐函数, 这样 z 是 x,y 的二元复合函数。故由复合函数的链式法则，$z=uv$ 两端分别对 x,y 求偏导，得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}$$

由于 u,v 是由方程组 $\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\end{cases}$ 确定的 x,y 的隐函数，在这两个等式两端分别关于 x,y 求偏导数，得 $\begin{cases}1=\cos v\frac{\partial u}{\partial x}-u\sin v\frac{\partial v}{\partial x}\\ 0=\sin v\frac{\partial u}{\partial x}+u\cos v\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$, $\begin{cases}0=\cos v\frac{\partial u}{\partial y}-u\sin v\frac{\partial v}{\partial y}\\ 1=\sin v\frac{\partial u}{\partial y}+u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$

故 $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos v,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\sin v}{u},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\sin v,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v}{u}$.

将这个结果代入前面的式子，得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}=v\cos v-\sin v$$

与 $$\frac{\partial z}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}=v\sin v+\cos v.$$

4. 设 f，g，$h\in C^1$. 若矩阵 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$ 可逆，且函数 $u=u(x,y)$ 由方程组

$\begin{cases}u=f(x,y,z,t)\\ g(y,z,t)=0\\ h(z,t)=0\end{cases}$ 确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

解：解法一、令 $F(x,y,z,t,u)=f(x,y,z,t)-u$. 因为矩阵 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$ 可逆，因此

$\frac{\partial(F,g,h)}{\partial(z,t,u)}=\begin{pmatrix}f_z' & f_t' & -1\\ g_z' & g_t' & 0\\ h_z' & h_t' & 0\end{pmatrix}$ 可逆，从而方程组 $\begin{cases}u=f(x,y,z,t)\\ g(y,z,t)=0\\ h(z,t)=0\end{cases}$ 确定了隐函数组

$z=z(x,y),\ t=t(x,y),\ u=u(x,y)$. 故 $\frac{\partial(z,t,u)}{\partial(x,y)}=-\left(\frac{\partial(F,g,h)}{\partial(z,t,u)}\right)^{-1}\frac{\partial(F,g,h)}{\partial(x,y)}$. 其中

$$\left(\frac{\partial(F,g,h)}{\partial(z,t,u)}\right)^{-1}=\frac{1}{g_z'h_t'-g_t'h_z'}\begin{pmatrix}0 & h_t' & g_t'\\ 0 & h_z' & -g_z'\\ g_z'h_t'-g_t'h_z' & -(f_z'h_t'-f_t'h_z') & f_z'g_t'-f_t'g_z'\end{pmatrix}$$ 且

$$\frac{\partial(F,g,h)}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix}f_x' & f_y'\\ 0 & g_y'\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$ 故 $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}}.$$

解法二、 因为矩阵 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$ 可逆，因此方程组 $\begin{cases}g(y,z,t)=0\\ h(z,t)=0\end{cases}$ 确定了隐函数组

$z=z(y),\ t=t(y)$，且 $$\begin{pmatrix}\frac{dz}{dy}\\ \frac{dt}{dy}\end{pmatrix}=-\left(\det\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial t} & -\frac{\partial g}{\partial t}\\ -\frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial y}\\ 0\end{pmatrix}.$$

对复合函数 $u=f(x,y,z(y),t(y))$ 分别关于 $x,\ y$ 求偏导，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dy}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dy}.$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}}.$$

5. 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$ 且方程 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ (#)

验证在 $P_0(1,1,1)$ 附近由方程(#)能确定可微的隐函数 $y=y(x,z)$ 及 $z=z(x,y)$；

求 $\frac{\partial(f(x,y(x,z),z))}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial(f(x,y,z(x,y)))}{\partial x}$ 及它们在 $P_0(1,1,1)$ 的值。

解： (1) 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+x^2-3xyz$. 则 $F_x'=2x-3yz$， $F_y'=2y-3xz$，

$F_z'=2z-3xy$. 因为 $F(P_0)=0$， $F_x',\ F_y',\ F_z'\in C(\mathbb{R}^3)$ 且 $F_y'(P_0)=F_z'(P_0)=-1\neq 0$，所以在 $Q_0(1,1)$ 的邻域内由方程(#)能确定可微的隐函数 $y=y(x,z)$ 及 $z=z(x,y)$.

(2) 当 $F_y'\neq 0$ 时，有 $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{2x-3yz}{2y-3xz}$； 同理，当 $F_z'\neq 0$ 时，有

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{2x-3yz}{2z-3xy}$. 所以 $\frac{\partial(f(x,y(x,z),z))}{\partial x}=y^2z^3+2xyz^3\frac{\partial y}{\partial x}$，

$$\frac{\partial(f(x,y,z(x,y)))}{\partial x}=y^2z^3+3xy^2z^2\frac{\partial z}{\partial x}$$ 且 $$\frac{\partial(f(1,y(1,1),1))}{\partial x}=-1，\quad \frac{\partial(f(1,1,z(1,1)))}{\partial x}=-2.$$

6. 设 $F(x,y)$ 是定义在第一象限并有连续偏导数的二元函数。又设 (x_0,y_0) 是第一象限中的一点，$F(x,y)$ 在该点满足条件 $x_0F_x^{'}(x_0,y_\partial)+y_0F_y^{'}(x_0,y_0)\neq 0,$ 且 $F(x_0,y_0)=0$. 证明：由方程 $F(x+uy^{-1},y+ux^{-1})=0$ 在点 (x_0,y_0) 的一个邻域上唯一地确定了一个满足 $u(x_0,y_0)=0$ 的隐函数 $u=u(x,y)$，且具有连续的偏导数。

证明：令 $G(x,y,u)=F(x+uy^{-1},y+ux^{-1}),\ \forall x>0,\ \forall y>0,\ \forall u\in\mathbf{R}.$

记 $\Omega=\{(x,y,u)\mid \forall x>0,\ \forall y>0,\ \forall u\in\mathbf{R}\}$，

则 $G(x,y,u)\in C^1(\Omega),$ 且 $G(x_0,y_0,0)=F(x_0,y_0)=0.$ 又

$$G_u^{'}(x_0,y_0,0)=y_0^{-1}F_x^{'}(x_0,y_0)+x_0^{-1}F_y^{'}(x_0,y_0)=(x_0y_0)^{-1}(x_0F_x^{'}(x_0,y_0)+y_0F_y^{'}(x_0,y_0))\neq 0,$$

由隐函数定理，存在 $r>0$ 使得在点 (x_0,y_0) 的 r 邻域上，方程

$F(x+uy^{-1},y+ux^{-1})=0$ 有唯一满足 $u(x_0,y_0)=0$ 的解 $u=u(x,y)$，且函数

$u=u(x,y)$ 在此邻域上有连续的偏导数。

7. 求解下列各题：

（1）求螺线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\ \ (a>0,c>0)\\ z=ct\end{cases}$ 在点 $M(\frac{a}{\sqrt2},\frac{a}{\sqrt2},\frac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面.

解：由于点 M 对应的参数为 $t_0=\frac{\pi}{4}$，所以螺线在 M 处的切向量是

$$\vec v=(x'(\pi/4),\ y'(\pi/4),\ z'(\pi/4))=(-a/\sqrt2,\ a/\sqrt2,\ c)$$

因而所求切线的参数方程为 $\begin{cases}x=a/\sqrt2-a/\sqrt2\,t,\\ y=a/\sqrt2+a/\sqrt2\,t,\\ z=(\pi/4)c+ct,\end{cases}$

法平面方程为 $-(a/\sqrt2)(x-a/\sqrt2)+(a/\sqrt2)(y-a/\sqrt2)+c(z-(\pi/4)c)=0$.

（2）求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6=0\\ z-x^2-y^2=0\end{cases}$ 在点 $M_0(1,1,2)$ 处的切线方程.

解：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$，$G(x,y,z)=z-x^2-y^2$，

则 $gradF(M_0)=(2,2,4),\qquad gradG(M_0)=(-2,-2,1)$

所以曲线在 $M_0(1,1,2)$ 处的切向量为 $v=gradF(M_0)\times gradG(M_0)=(10,-10,\ 0)$，

于是所求的切线方程为 $\begin{cases}x=1+10t\\ y=1-10t\\ z=2.\end{cases}$

8. 求曲面 $S:2x^2-2y^2+2z=1$ 上切平面与直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\ x+y+z=0\end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

解：直线 L 的方向方向：$\vec{\tau}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$.

切点为 $P(x,y,z)$ 处曲面 S 的法向量：$\vec{n}=4x\vec{i}-4y\vec{j}+2\vec{k}$.

因为 $\vec{n}\perp\vec{\tau}\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{\tau}=-4x+16y+10=0$，且切点在曲面上，

因此切点的轨迹为空间曲线：$\begin{cases}2x-8y=5\\ 2x^2-2y^2+2z=1,\end{cases}$

该曲线的参数方程：$\begin{cases}x=x\\ y=(2x-5)/8\\ z=(-60x^2-60x+57)/64.\end{cases}$

9. 证明球面 $S_1:x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2:x^2+y^2=a^2z^2$ 正交.

证明：所谓两曲面正交是指它们在交点处的法向量互相垂直.

记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2,\quad G(x,y,z)=x^2+y^2-a^2z^2$，

设点 $M(x,y,z)$ 是两曲面的公共点。曲面 S_1 在点 $M(x,y,z)$ 处的法向量是

$$gradF(x,y,z)=(2x,2y,2z)^T \text{ 或者 } \vec{v}_1=(x,y,z)^T,$$

曲面 S_2 在点 $M(x,y,z)$ 处的法向量为 $\vec{v}_2=(x,\ y,\ -a^2z)^T$.

则在点 $M(x,y,z)$ 处有 $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=(x,y,z)^T\cdot(x,y,-a^2z)^T=x^2+y^2-a^2z^2=0$，

即在公共点处两曲面的法向量相互垂直，因此两曲面正交.

10. 已知曲面 S 的方程 $e^z=xy+yz+zx$，求曲面 S 在 $(1,1,0)$ 处的切平面方程；若曲面 S 的显式方程为 $z=f(x,y)$，求 $gradf(1,1)$.

解：令 $F(x,y,z)=e^z-xy-yz-zx$. 则

$F_x'(1,1,0)=-1,\ F_y'(1,1,0)=-1,\ F_z'(1,1,0)=-1.$

所以曲面 S 在 $(1,1,0)$ 处的法向量为 $(-1,-1,-1)$ 或 $(1,1,1)$. 从而曲面 S 在 $(1,1,0)$ 处的切平面方程 $(x-1)+(y-1)+z=0$，即 $x+y+z=2$.

因为 $f_x'(1,1)=-\dfrac{F_x'(1,1,0)}{F_z'(1,1,0)}=-1,\quad f_y'(1,1)=-\dfrac{F_y'(1,1,0)}{F_z'(1,1,0)}=-1,$

所以 $gradf(1,1)=(f_x^{'}(1,1), f_y^{'}(1,1))=(-1,-1)$.

11. 已知 f 可微，证明曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置.

证明：设 $F(x,y,z)=f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=f_1'\cdot\left(\frac{1}{z-c}\right),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=f_2'\cdot\left(\frac{1}{z-c}\right),\quad \frac{\partial F}{\partial z}=f_1'\cdot\frac{a-x}{(z-c)^2}+f_2'\cdot\frac{b-y}{(z-c)^2}.$$

则曲面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面为

$$f_1'(P_0)\frac{x-x_0}{z_0-c}+f_2'(P_0)\frac{y-y_0}{z_0-c}+\left(f_1'(P_0)\frac{a-x_0}{(z_0-c)^2}+f_2'(P_0)\frac{b-y_0}{(z_0-c)^2}\right)(z-z_0)=0\text{，即}$$

$$f_1^{'}(P_0)(z_0-c)(x-x_0)+f_2^{'}(P_0)(z_0-c)(y-y_0)+f_1^{'}(P_0)(a-x_0)(z-z_0)+f_2^{'}(P_0)(b-y_0)(z-z_0)=0.$$

易见当 $x=a,z=c,y=b$ 时上式恒等于零。于是曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点处的切平面通过一定点 (a,b,c).

12. 设 G 是可导函数且在自变量取值为零时，导数为零，否则函数的导数都不等于零。曲面 S 由方程 $ax+by+cz=G\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 确定，试证明：曲面 S 上任一点的法线与某定直线相交。

证明: 曲面上任意一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的法线为

$$\frac{x-x_0}{a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}=\frac{y-y_0}{b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}=\frac{z-z_0}{c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}.$$

设相交的定直线为 $\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}$,

则 $\left(a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\right)$

和 (α,β,γ) 不平行，故

$$\left[\left(a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2),c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\right)\times(\alpha,\beta,\gamma)\right]\cdot\left(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\right)=0,$$

即

$$\begin{vmatrix} a-2x_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) & b-2y_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) & c-2z_0G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2) \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}=0，$$

从而 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix} - 2G'(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}=0$，

故只要取 $(\alpha,\beta,\gamma)=(a,b,c),\quad (x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$ 即可。

13. 求过直线 $\begin{cases} 3x-2y-z=-15 \\ x+y+z=10 \end{cases}$ 且与曲面 $S: x^2-y^2+z=10$ 相切的平面方程。

解：曲面 $S: x^2-y^2+z=10$ 在 (x,y,z) 处的法向量为 $(2x,-2y,1)$.

故曲面在 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程：$2x_0(x-x_0)-2y_0(y-y_0)+(z-z_0)=0$，

即，$2x_0x-2y_0y+z=20-z_0$.

将直线方程 $\begin{cases} 3x-2y-z=-15 \\ x+y+z=10 \end{cases}$ 化为 $\begin{cases} y=4x+5 \\ z=5-5x, \end{cases}$

代入切平面方程，得 $(2x_0-8y_0-5)x-10y_0-15+z_0=0$，

故 $\begin{cases} 2x_0-8y_0-5=0 \\ -10y_0-15+z_0=0. \end{cases}$ 又 $x_0^2-y_0^2+z_0=10$，可解得 $x_0=\dfrac{1}{2},\ y_0=-\dfrac{1}{2},\ z_0=10;$

或 $x_0=-\dfrac{7}{2},\ y_0=-\dfrac{3}{2},\ z_0=0.$ 所以切平面方程为 $x+y+z=10$ 或

$-7x+3y+z=20.$

14. 证明：设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是一个非空区域，且 $z=f(x,y)\in C^2(D)$. 则在旋转变换

$u=x\cos\theta+y\sin\theta,\ v=-x\sin\theta+y\cos\theta$ 下，表达式 $f''_{xx}+f''_{yy}$ 不变。

证明：因为 $\det\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=1$，因此存在逆变换

$x=x(u,v),\ y=y(u,v)$，使得通过变量 u,v，f 转为 x,y 的函数，

所以 $f'_x=f'_uu'_x+f'_vv'_x=f'_u\cos\theta-f'_v\sin\theta$，

$f''_{xx}=f''_{uu}\cos^2\theta-2f''_{uv}\sin\theta\cos\theta+f''_{vv}\sin^2\theta$，

$$f_y' = f_u' \sin\theta + f_v' \cos\theta，\quad f_{yy}'' = f_{uu}'' \sin^2\theta + 2 f_{uv}'' \sin\theta\cos\theta + f_{vv}'' \cos^2\theta.$$

故 $f_{xx}'' + f_{yy}'' = f_{uu}'' + f_{vv}''$.