第一次习题课解答（多元函数极限、连续、偏导数及可微性）

1. 讨论下列函数在 $(0,0)$ 点的累次极限与二重极限是否存在，若存在求其值，若不存在，说明理由。

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

解：由于对 $\forall y\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$，故 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$；同理可求得

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0.$$

沿直线 $y=x$ 动点趋于 $(0,0)$ 点时，有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=1$；沿直线 $y=0$ 动点趋于 $(0,0)$ 点时，有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=0$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在。

(2) 记 $D=\{(x,y)\,|\,x+y\neq 0\}$， $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, $(x,y)\in D$.

解：直接计算可得 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$，且 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$.
由于两个累次极限存在但不等，故 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in D}} f(x,y)$ 不存在。

(3) $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0.\end{cases}$

解：对 $\forall y\neq 0$，有 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}=0$，所以 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}=0$． 由于对 $\forall x\neq 0$，$\lim\limits_{y\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在，故 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在。因为

$$0\le \left|x\sin\frac{1}{y}\right|\le |x|\to 0\quad (x\to 0),$$

因此二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

2. 解答证明下列题目：

(1) 令 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$． 讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$ 是否存在。

解：取 $y=-x$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}=0$；另一方面，令 $y=x+x^{\frac{1}{3}}$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{2x+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\infty$.

故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$ 不存在。

解法二、取 $y-x=1$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}=\infty$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$ 不存在。

(2) 讨论 $f(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$ 在 $x\to+\infty,\ y\to-\infty$ 时的极限状况。

解：取 $y=-x$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to-\infty}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(-2x^2)$ 不存在，故 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to-\infty}}f(x,y)$ 不存在。

任意固定 $y<0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$ 不存在，从而 $\lim\limits_{y\to-\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,y)$ 不存在；任意固定 $x>0$，因为

$$\lim_{y\to-\infty}f(x,y)=\lim_{y\to-\infty}e^{x^2-y^2}\sin(2xy)=0,$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to-\infty}f(x,y)=0$.

(3) 设 $\alpha,\beta\geq 0$, 且 $\alpha+\beta>2$. 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2}=0.$

证明：因为 $\alpha,\beta\geq 0$, 且 $\alpha+\beta>2$, $|x|\leq(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, $|y|\leq(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$，因此

$$0\leq\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2}\leq\frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta-2}{2}}\to 0\quad((x,y)\to(0,0)),$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2}=0.$

3. 讨论下列函数极限是否存在，若存在并求其值。

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to-\infty}}(x^2+y^2)e^{y-x}$.

解：(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(1+(x+y-1))^{\frac{1}{x+y-1}\cdot(x+y+1)}=e^2$；

(2) 设 $x^2+y^2<1$，则 $|\ln(x^2+y^2)|\leq|\ln x^2|$, $|\ln(x^2+y^2)|\leq|\ln y^2|$，

而

$$0 \le |(x+y)\ln(x^2+y^2)| \le |x\ln x^2| + |y\ln y^2| \to 0\ \ ((x,y)\to 0),$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0.$$

(3)

$$0 \le \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \left|\frac{x}{x^2-xy+y^2}\right| + \left|\frac{y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \left|\frac{x}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right| + \left|\frac{y}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right|$$

$$\le \left|\frac{2}{x}\right| + \left|\frac{2}{y}\right| \to 0\ \ (x\to\infty,\ \ y\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$.

(4) 令 $y=-z$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}(x^2+y^2)e^{y-x} = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ z\to+\infty}}(x^2+z^2)e^{-(x+z)}$，

当 $x\to+\infty,\ z\to+\infty$ 时，有 $x^2+z^2<(x+z)^2$，因此

$$0 \le (x^2+z^2)e^{-(x+z)} < (x+z)^2 e^{-(x+z)},$$

令 $x+z=\rho$，则 $x\to+\infty,\ z\to+\infty$ 时，有 $\rho\to+\infty$，而 $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\rho^2e^{-\rho}=0$. 所以

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ z\to+\infty}}(x^2+z^2)e^{-(x+z)}=0.$

解法二、求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ z\to+\infty}}(x^2+z^2)e^{-(x+z)}$ 也可用极坐标，令 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$，则

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，且 $x\to+\infty,\ z\to+\infty$ 时有 $\rho\to+\infty$，所以

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ z\to+\infty}}(x^2+z^2)e^{-(x+z)} = \lim\limits_{\rho\to+\infty}\rho^2 e^{-\sqrt{2}\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}=0$.（注意：$\sin(\theta+\frac{\pi}{4})>\frac{\sqrt{2}}{2}$）

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\ne 0;\\ y, & x=0.\end{cases}$ 讨论其在定义域内的连续性。

解：显然 $D=\{(x,y)\mid xy>-1\}$ 为函数 $f(x,y)$ 的定义域。显然 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) $(x_0\ne 0)$ 点处一定连续。故只要讨论 $f(x,y)$ 在 y 轴上的连续性即可。

（1）在$(0,0)$点，$f(0,0)=0$.

当$y=0$时，$f(x,0)=0$；当$x=0$时，$f(0,y)=y\to 0\quad ((x,y)\to(0,0))$；

且$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y=0=f(0,0)$，

所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$，故$f(x,y)$在$(0,0)$点连续。

（2）在$(0,y_0)\ (y_0\neq 0)$点，$f(0,y_0)=y_0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}}\frac{\ln(1+xy)}{xy}\cdot\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}} y=y_0=f(0,y_0);$$

所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y)=f(0,y_0)$，从而$f(x,y)$在$(0,y_0)$点连续。

因此函数$f(x,y)$在其定义域内连续。

5. 若$f(x,y)$在$(0,0)$点的某个邻域内有定义，$f(0,0)=0$，且

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$，其中$a$为常数。证明：

（1）$f(x,y)$在$(0,0)$点连续；

（2）若$a\neq -1$，则$f(x,y)$在$(0,0)$点连续，但不可微；

（3）若$a=-1$，则$f(x,y)$在$(0,0)$点可微。

证明：因为$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$，因此

$$\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a+o(1),\ （(x,y)\to 0）$$

故$f(x,y)=(a+1)\sqrt{x^2+y^2}+o(\sqrt{x^2+y^2})$，$(x,y)\to 0$.

(1) 显然。

(2) 若$a\neq -1$，因为

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+1)|x|+o(|x|)}{x}$$

不存在，同理可知$f_y'(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$不存在，因此$f(x,y)$在$(0,0)$点不

可微。

(3) 若 $a=-1$，则 $f_x^{'}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+1)|x|+o(|x|)}{x}=0$，

同理可求得 $f_y^{'}(0,0)=0$，这样

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x^{'}(0,0)x-f_y^{'}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{o(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微且 $df(0,0)=0$.

6. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性及可微性。

解：(1) 因为

$$\left|\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)\right|\le\sqrt{|xy|}\to 0,\quad (x,y)\to 0,$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

(2) 因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，且

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(\Delta y,0)-f(0,0)}{\Delta y}=0,$$

故

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y\right)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\Delta x^2+\Delta y^2).$$

取 $\Delta y=\Delta x$，则 $\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)\to\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $(\Delta x\to 0)$,

所以 $\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)$ 不是无穷小（当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时）。

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微。

7\. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，但偏导数在 $(0,0)$ 不连续。

证明：因为 $f_x^{'}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=0$，

$$f_y^{'}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to0}\frac{y^2\sin\frac{1}{y^2}}{y}=0,$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$，

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，且 $df(0,0)=0$.

下面求函数在 $(x,y)\neq(0,0)$ 的两个偏导数：

$$f_x^{'}(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f_y^{'}(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

所以 $f_x^{'}(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$

$$f_y^{'}(x,y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$, 而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 不存在，

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_y^{'}(x,y)$ 不存在，故 $f_y^{'}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续。

同理可证 $f_x^{'}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续。

【该题说明：函数在一点处可微，偏导函数在该点不一定连续】

8. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在。

证明： $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。

证明：因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，记 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=a$.

由于函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，因此

$$f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}(x^2+y^2)$$

$$=\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\right)=0.$$

从而 $f_x^{'}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x^2}\lim\limits_{x\to 0}x=0,$

$$f_y^{'}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)}{y^2}\lim_{x\to 0}y=0,$$

这样 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left(\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\right)=0,$

由可微的定义，函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且 $df(0,0)=0.$

9. 设函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数存在，且这两个偏导数在点 $(0,0)$ 处连续。

已知 $f_x^{'}(0,0)=3,\quad f_y^{'}(0,0)=4.$ 求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,t)-f(0,0)}{t}.$

解：因为函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x^{'}(x,y),\ f_y^{'}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，因此由可微的充分条件知，函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，故

$$f(t,t)-f(0,0)=f_x^{'}(0,0)t+f_y^{'}(0,0)t+o(t),\ (t\to 0)$$

所以 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,t)-f(0,0)}{t}=f_x^{'}(0,0)+f_y^{'}(0,0)+\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{o(t)}{t}=7.$

10. 求解下列问题：

(1) 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\sin y+\dfrac{1}{1-xy}$ ，且 $f(1,y)=\sin y$, 求 $f(x,y)$.

解：对 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\sin y+\dfrac{1}{1-xy}$ 两边关于 x 求不定积分，得

$$f(x,y)=x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+g(y).$$

已知 $f(1,y)=\sin y$，所以 $g(y)=\dfrac{1}{y}\ln|1-y|$，故

$$f(x,y)=x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+\frac{1}{y}\ln|1-y|.$$

(2) 设函数 $f(x,y)$ 的全微分为 $df(x,y)=e^{xy}(y\sin x+\cos x)dx+xe^{xy}\sin xdy$，且 $f(0,0)=1$，求 $f(x,y)$.

解：由 $df(x,y)=e^{xy}(y\sin x+\cos x)dx+xe^{xy}\sin xdy$ 可知，

$$f_x^{'}(x,y)=e^{xy}(y\sin x+\cos x)，且\ f_y^{'}(x,y)=xe^{xy}\sin x.$$

对 $f_y^{'}(x,y)=xe^{xy}\sin x$ 两边关于 y 求不定积分，得 $f(x,y)=e^{xy}\sin x+g(x)$，两边关于 x 求偏导，有 $f_x^{'}(x,y)=ye^{xy}\sin x+e^{xy}\cos x+g^{'}(x)$，又知

$$f_x^{'}(x,y)=e^{xy}(y\sin x+\cos x),$$

因此 $g'(x)=0$，故 $g(x)=c$ 且 $f(x,y)=e^{xy}\sin x+c$. 由于 $f(0,0)=1$，所以 $c=1$ 且 $f(x,y)=e^{xy}\sin x+1$.

11. 设函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 U 内存在且有界，证明：$f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续。

证明：因为函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 U 内存在且有界，因此存在 $M>0$ 使得对任意的 $(x,y)\in U$，有 $|f_x^{'}(x,y)|\le M$，$|f_y^{'}(x,y)|\le M$.

任取 $(x,y)\in U$. 由一元函数的微分中值定理，存在 θ_1，$\theta_2\in(0,1)$ 使得

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&\le|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&=|f_y^{'}(x,y_0+\theta_1(y-y_0))(y-y_0)|+|f_x^{'}(x_0+\theta_2(x-x_0),y_0)(x-x_0)|\\&\le M(|y-y_0|+|x-x_0|)\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$. 所以 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续。

12. 给定单位向量 $\vec{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$，设 l 是以 $P_0(x_0,y_0)$ 为顶点，$\vec{v}$ 为方向向量的射线，则称极限

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in l}} f(x,y)=\lim_{t\to0^+} f(x_0+t\cos\theta, y_0+t\sin\theta)$$

为函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点沿着方向 $\vec{v}$ 的方向极限。讨论下列函数在 $(0,0)$ 点的方向极限及二重极限，并总结二者的关系。

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad (x,y)\neq(0,0)$;

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}, & y\neq0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$

解：(1) 对任意的单位向量 $\vec{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$，有 $f(t\cos\theta,t\sin\theta)=\cos2\theta$, 故

$$\lim_{t\to0^+} f(t\cos\theta,t\sin\theta)=\cos2\theta,$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿着方向 $\vec{v}$ 的方向极限是 $\cos2\theta$. 即函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿着不同方向的方向极限不相等，从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在。

(2) 对任意的单位向量 $\vec{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$，当 $\theta\neq0,\pi$ 时，

$$f(t\cos\theta,t\sin\theta)=\frac{t\cos^2\theta}{\sin\theta},$$

所以 $\lim\limits_{t\to0^+} f(t\cos\theta,t\sin\theta)=0$. 当 $\theta=0,\pi$ 时， $f(t\cos\theta,t\sin\theta)=f(\pm t,0)=0$, 故 $\lim\limits_{t\to0^+} f(t\cos\theta,t\sin\theta)=0$. 因此函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿着任何方向的方向极限都存在且相等，都等于零。

由于 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^3}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^3}=\infty$，所以二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在。

二重极限与方向极限的关系：函数在一点的二重极限存在，则在该点沿着任意方向的方向极限都存在且都等于二重极限值；反之，若沿着两个不同方向的方向极限存在但不等，则二重极限不存在，即便函数在该点沿着任意方向的方向极

限都存在且相等，函数在该点的二重极限也不一定存在，例如本题(2)中的函数，原因是它沿不同方向趋于零的快慢程度不同，沿着靠近Oy轴的方向趋于零的速度快，而沿着靠近Ox轴的方向趋于零的速度慢，以至于当$\theta \to 0, \pi$时，函数$f(x,y)$在$(0,0)$点沿着方向$\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$趋于零的速度无限地变慢。

不难证明，若$f(x,y)$在$P_0(x_0, y_0)$点沿任何方向的方向极限都存在且相等，而且沿不同方向趋于极限的快慢一致，则$f(x,y)$在$P_0(x_0, y_0)$点的二重极限存在且等于这些方向极限。