习题课 207 题目：重积分计算

一、累次积分

1. 确定以下积分的积分区域，并写出不同顺序的累次积分，如有可能，求相应的值

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^3 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\mathrm{d}y$

(2) 求由曲面 $S:(x^2+y^2)^2+z^4=z$ 所围有界区域 Ω 的体积。

(3) 有界区域 Ω 由 $y=0,z=0,x+z=1,x=\sqrt{y}$ 围成，求 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

二、积分换元

2. 针对积分区域和被积函数写出相应的换元公式，并计算相应积分的值，或证明相应结论

(1) $\iint\limits_{\substack{0\le x+y\le \pi,\\ 0\le x-y\le \pi}} (x+y)\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2) $\iint\limits_{\substack{x+y\le 1,\\ x\ge 0,y\ge 0}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(3) 求由六个平面 $3x-y-z=\pm1,-x+3y-z=\pm1,-x-y+3z=\pm1$ 所围立体的体积.

(4) $\iint_D \dfrac{x^2}{y}\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y):0<a\le \dfrac{x^2}{y}\le b \quad 0<p\le \dfrac{y^2}{x}\le q\right\}$， a,b,p,q 为常数.

(5) 设 $V=\{(x,y,z)|\}$， $h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$， $f\in C[-h,h]$. 证明:

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^1 (1-t^2)f(ht)\mathrm{d}t .$$

(6) 设 V 是区域 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{R^2-x^2-y^2}$. 求 $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

(7) 设 A 为 3×3 实对称正定矩阵， $H(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$，则 $H(\mathbf{x})=1$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个椭球面。

(i) 证明：椭球面 $H(\mathbf{x})=1$ 所包围立体 V 的体积为 $|V|=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$.

(ii) 计算积分 $I=\iiint\limits_{H(x)\le 1} \mathrm{e}^{\sqrt{H(x)}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$.

(8) 计算积分 $I=\iint\limits_D \dfrac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| 2\le \dfrac{x}{x^2+y^2}\le 4,\ 2\le \dfrac{y}{x^2+y^2}\le 4\right\}$.

三、综合习题

3. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $f(x,y)=f(y,x)$. 证明:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(1-x,1-y)\mathrm{d}y.$$

4. 设 $f \in R[a,b]$，证明：$\int_a^b \mathrm{d}x_1 \int_a^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\mathrm{d}x_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1} f(x)\mathrm{d}x$.

5. 设 $f \in R[0,1]$. 证明：$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^3$.

6. 设 $f \in C[0,+\infty)$, $t > 0$ ， $\Omega_t = \left\{(x,y,z) \mid 0 \le z \le h,\ x^2+y^2 \le t^2\right\}$ ，求

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^2} \iiint\limits_{\Omega_t} \left(z^2 + f(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

7. 证明：$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.