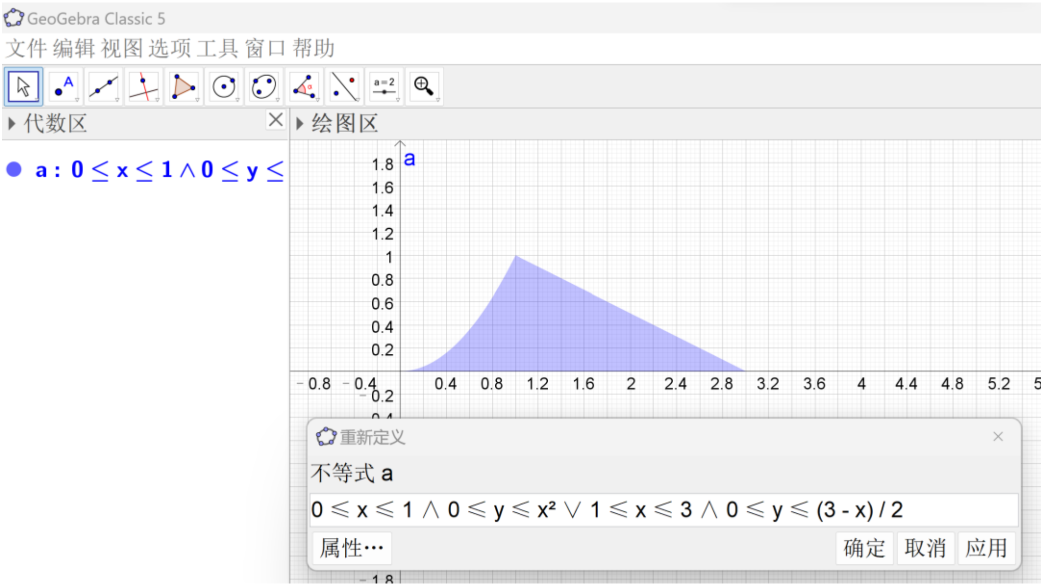
习题课 207 参考答案：重积分计算

一、累次积分

1. 确定以下积分的积分区域，并写出不同顺序的累次积分，如有可能，求相应的值

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\mathrm{d}y$

解法 1：（建议由学生手绘）画图



解法 2：（由学生解决或由助教讲解）解不等式

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} 1 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le \dfrac{3-x}{2} \end{cases}$$

$0 \le \sqrt{y} \le x \le 1$ 或 $1 \le x \le 3-2y \le 3$，即 $0 \le \sqrt{y} \le x \le 3-2y \le 3$，这等价于

$$\begin{cases} \sqrt{y} \le x \le 3-2y \\ 0 \le \sqrt{y} \le 3-2y \le 3 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} \sqrt{y} \le x \le 3-2y \\ (\sqrt{y}-1)(2\sqrt{y}+3) \le 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} \sqrt{y} \le x \le 3-2y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

因此上述累次积分可以该写为另一顺序的累次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\mathrm{d}x$

解法 3：（留给学生课后自学）用示性函数，本质上与方法 2 相同。以下过程中并未涉及广义积分。

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{0\le x\le 1} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) 1_{0\le y\le x^2} \mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{1\le x\le 3} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) 1_{0\le y\le \frac{3-x}{2}} \mathrm{d}y \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) 1_{0\le y\le x^2} 1_{0\le x\le 1} + f(x,y) 1_{0\le y\le \frac{3-x}{2}} 1_{1\le x\le 3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)(1_{0\le\sqrt{y}\le x\le 1} + 1_{0\le y\le \frac{3-x}{2}\le 1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) 1_{0\le y\le 1}(1_{\sqrt{y}\le x\le 1} + 1_{1\le x\le 3-2y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) 1_{0\le y\le 1} 1_{\sqrt{y}\le x\le 3-2y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(2) 求由曲面 $S:(x^2+y^2)^2+z^4=z$ 所围有界区域 Ω 的体积。

解：$S:(x^2+y^2)^2+z^4=z$ 是一个绕 z 轴旋转的曲面，这样的曲面具有形如 $F(x^2+y^2,z)=0$ 的方程。

$(x^2+y^2)^2+z^4\le z$ 给出有界的区域，即 $0\le x^2+y^2\le\sqrt{z-z^4}$.

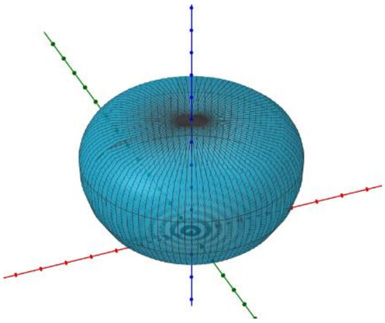
$z-z^4=z(1-z)(z^2+z+1)\ge 0$ 即 $0\le z\le 1$.

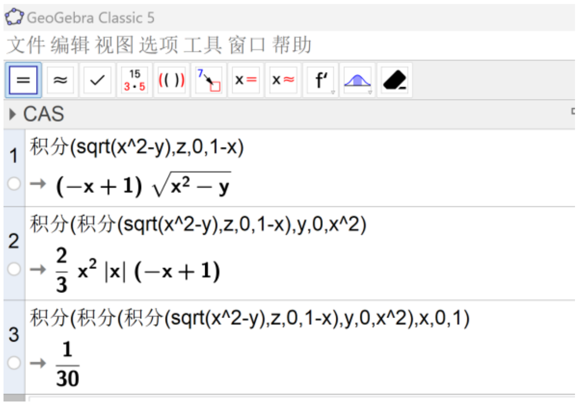
在 zx 平面中近似画出 $x=\sqrt[4]{z-z^4}$ 的图像，再画出它绕 z 轴旋转的曲面。

区域 Ω： $0\le z\le 1$， $0\le x^2+y^2\le\sqrt{z-z^4}$ ，于是相应的累次积分为

$$\int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\le\sqrt{z-z^4}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 2\pi\sqrt{z-z^4}\,\mathrm{d}z \overset{t=z^{\frac{3}{2}}}{=} \frac{4\pi}{3}\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{3}$$

在 Geogebra 中可以用曲面参数方程 $\begin{cases} x=\sqrt[4]{z-z^4}\cos\theta \\ y=\sqrt[4]{z-z^4}\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ 画出区域图形。





(3) 有界区域 Ω 由 $y=0,z=0,x+z=1,x=\sqrt{y}$ 围成，求 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

解法 1：（建议由学生讲解，助教给与必要提示）解不等式。

y 有界： $0\le\sqrt{y}\le x$； x 有上界： $x\le 1-z$； z 有下界： $z\ge 0$.

将上述不等式联立： $0\le\sqrt{y}\le x\le 1-z\le 1$.

$$\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le x^2, \\ 0\le z\le 1-x, \end{cases}$$

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y\int_0^{1-x}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(1-x)\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^0(1-x)u\,\mathrm{d}_u(x^2-u^2)=\int_0^1(1-x)\frac{2x^2}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{30}$$

这样的累次积分可用 Geogebra 计算（如上图所示）。

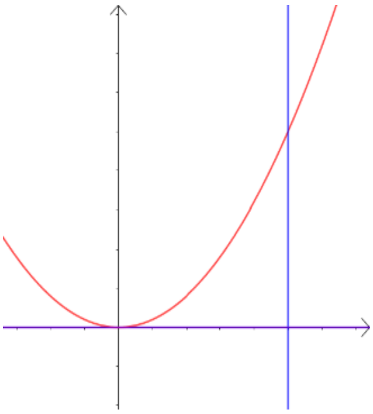
$\begin{cases} 0\le y\le 1, \\ 0\le z\le 1-\sqrt{y}, \\ \sqrt{y}\le x\le 1-z, \end{cases}$ $\int_0^1 dy\int_0^{1-\sqrt{y}} dz\int_{\sqrt{y}}^{1-z}\sqrt{x^2-y}dx$； $\begin{cases} 0\le y\le 1, \\ \sqrt{y}\le x\le 1, \\ 0\le z\le 1-x, \end{cases}$ $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 dx\int_0^{1-x}\sqrt{x^2-y}dz$；

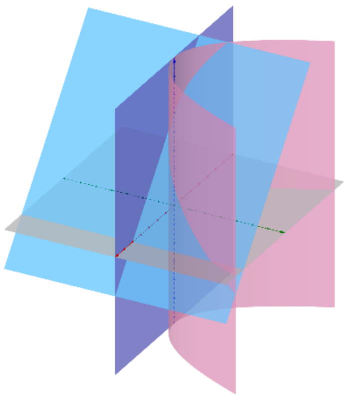
$\begin{cases} 0\le z\le 1, \\ 0\le y\le (1-z)^2, \\ \sqrt{y}\le x\le 1-z, \end{cases}$ $\int_0^1 dz\int_0^{(1-z)^2} dy\int_{\sqrt{y}}^{1-z}\sqrt{x^2-y}dx$； $\begin{cases} 0\le z\le 1, \\ 0\le x\le 1-z, \\ 0\le y\le x^2 \end{cases}$ $\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy$；

讨论：上述哪些累次积分易于计算？

解法 2：将边界条件投影到 xy 坐标平面 $z=0$： $y=0, x=1, x=\sqrt{y}$， 由此得到 $\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le x^2 \end{cases}$

在这个区域内，$1-x\ge 0$，从而得到 z 的范围 $0\le x\le 1-z$.





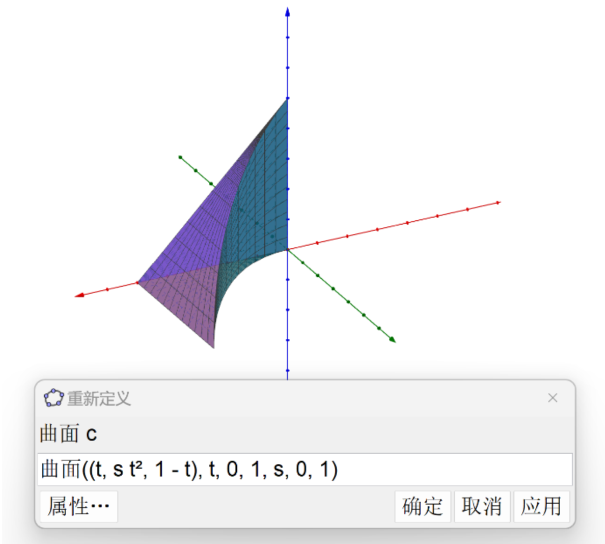
边界曲面的参数方程以及软件作图

$\begin{cases} x=t, \\ y=st^2, \quad 0\le t\le 1, 0\le s\le 1, \\ z=1-t, \end{cases}$

$\begin{cases} x=t, \\ y=st^2, \quad 0\le t\le 1, 0\le s\le 1, \\ z=0, \end{cases}$

$\begin{cases} x=t \\ y=t^2, \quad 0\le t\le 1, 0\le s\le 1 \\ z=s(1-x), \end{cases}$

$\begin{cases} x=t \\ y=0, \quad 0\le t\le 1, 0\le s\le 1 \\ z=s(1-x), \end{cases}$



二、积分换元

2. 针对积分区域和被积函数写出相应的换元公式，并计算相应积分的值，或证明相应结论

(1) $\iint\limits_{\substack{0\le x+y\le\pi,\\ 0\le x-y\le\pi}} (x+y)\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

解： $u=x+y, v=x-y$， $\det\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-2$， $\iint\limits_{\substack{0\le x+y\le\pi,\\ 0\le x-y\le\pi}} (x+y)\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,\pi]} u\sin v\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

(2) $\iint\limits_{\substack{x+y\le 1,\\ x\ge 0, y\ge 0}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解： $u=x+y, v=\dfrac{y}{x+y}$， $x=u-uv, y=uv$， $\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{vmatrix}=u$

$$\iint\limits_{\substack{x+y\le 1,\\ x\ge 0, y\ge 0}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{u\le 1,\\ u\ge uv\ge 0}} \mathrm{e}^{v}u\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{[0,1]^2} \mathrm{e}^{v}u\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

(3) 求由六个平面 $3x-y-z=\pm1, -x+3y-z=\pm1, -x-y+3z=\pm1$ 所围立体的体积.

解： $u=3x-y-z, v=-x+3y-z, w=-x-y+3z$， $\det\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=16$

$$\iiint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{[-1,1]^3}\frac{1}{16}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{1}{2}$$

(4) $\iint_D \dfrac{x^2}{y}\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y): 0<a\le\dfrac{x^2}{y}\le b \quad 0<p\le\dfrac{y^2}{x}\le q\right\}$， a,b,p,q 为常数.

解： $u=\dfrac{x^2}{y}, v=\dfrac{y^2}{x}$， 则 $\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2}\\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x}\end{vmatrix}=3$，

$$\iint\limits_{D}\frac{x^2}{y}\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{a\le u\le b\\ p\le v\le q}}\frac{u}{3}\sin(uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_a^b u\mathrm{d}u\int_p^q\sin(uv)\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_a^b u\left.\frac{-\cos(uv)}{u}\right|_{v=p}^{q}\mathrm{d}u$$

(5) 设 $V=\{(x,y,z)|\}$， $h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$， $f\in C[-h,h]$. 证明:

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)\mathrm{d}t .$$

证明：取正交矩阵 A 使得 $A=\begin{pmatrix} \frac{a}{h} & \frac{b}{h} & \frac{c}{h} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，则

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} f(hu)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\int_{-1}^{1} f(hu)\mathrm{d}u\iint_{v^2+w^2\le 1-u^2}\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)\mathrm{d}t$$

(6) 设 V 是区域 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}$． 求 $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

解：柱坐标 $r\le z\le\sqrt{R^2-r^2}$，$\iiint_{r\le z\le\sqrt{R^2-r^2}}(r^2+z^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z=2\pi\int_0^R\mathrm{d}z\int_{r^2\le\min\{z^2,R^2-z^2\}}\frac{r^2+z^2}{2}\mathrm{d}r^2$

$$\iiint_{r\le z\le\sqrt{R^2-r^2}}(r^2+z^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z=2\pi\int_0^R r\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{R^2-r^2}}\frac{r^2+z^2}{2}\mathrm{d}z$$

球坐标系 $0\le r\le R, r\sin\theta\le r\cos\theta$，$\iiint_{\substack{0\le\theta\le\frac{\pi}{4},0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le R}} r^2r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

对比上述做法的优劣。

(7) 设 A 为 3×3 实对称正定矩阵，$H(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$，则 $H(\mathbf{x})=1$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个椭球面。

(i) 证明：椭球面 $H(\mathbf{x})=1$ 所包围立体 V 的体积为 $|V|=\frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$．

(ii) 计算积分 $I=\iiint_{H(\mathbf{x})\le 1}\mathrm{e}^{\sqrt{H(x)}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$．

证明：因为 A 对称正定，所以存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^TP$．线性变换 $\mathbf{y}=P\mathbf{x}$ 下，

$\mathbf{y}^T\mathbf{y}=\mathbf{x}^TP^TP\mathbf{x}=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$，因此

$$\iiint_{H(\mathbf{x})\le 1}\mathrm{e}^{\lambda\sqrt{H(\mathbf{x})}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\iiint_{\mathbf{y}^T\mathbf{y}\le 1}\mathrm{e}^{\lambda\sqrt{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}}\left|\det P^{-1}\right|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3=\frac{1}{\sqrt{\det A}}\iiint_{\mathbf{y}^T\mathbf{y}\le 1}\mathrm{e}^{\lambda\sqrt{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\det A}}\int_0^1\mathrm{e}^{\lambda r}r^2\mathrm{d}r\iint_{\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{(\lambda^2-2\lambda+2)\mathrm{e}^{\lambda}-2}{\lambda^3\sqrt{\det A}}\iint_{\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{(\lambda^2-2\lambda+2)\mathrm{e}^{\lambda}-2}{\lambda^3\sqrt{\det A}}\cdot 3\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\iint_{\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{(\lambda^2-2\lambda+2)\mathrm{e}^{\lambda}-2}{\lambda^3\sqrt{\det A}}\cdot 3\cdot\frac{4\pi}{3}$$

$$|V|=\iiint\limits_{H(x)\le 1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\iiint\limits_{H(x)\le 1}\mathrm{e}^{\lambda\sqrt{H(\mathbf{x})}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\bigg|_{\lambda=0}=\frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}},$$

$$I=\iiint\limits_{H(x)\le 1}\mathrm{e}^{\sqrt{H(\mathbf{x})}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\frac{4\pi(\mathrm{e}-2)}{\sqrt{\det A}}$$

(8) 计算积分 $I=\iint\limits_{D}\frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|2\le\frac{x}{x^2+y^2}\le 4,\ 2\le\frac{y}{x^2+y^2}\le 4\right\}$.

解： $u=\frac{x}{x^2+y^2},v=\frac{y}{x^2+y^2}$.

三、综合习题

3. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $f(x,y)=f(y,x)$. 证明:

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(1-x,1-y)\mathrm{d}y.$$

证法 1：累次积分–重积分–重积分换元

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_{0\le y\le x\le 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{0\le 1-v\le 1-u\le 1}f(1-u,1-v)\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\iint\limits_{0\le u\le v\le 1}f(1-u,1-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^v f(1-u,1-v)\mathrm{d}u=\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^v f(1-v,1-u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(1-x,1-y)\mathrm{d}y$$

证法 2：累次积分–重积分–一元换元

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_{0\le y\le x\le 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{0\le y\le x\le 1}f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(y,x)\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_1^{1-x}f(1-t,x)\mathrm{d}(1-t)$$

$$=\int_1^0\mathrm{d}(1-s)\int_1^{1-(1-s)}f(1-t,1-s)\mathrm{d}(1-t)$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}s\int_s^1 f(1-t,1-s)\mathrm{d}t$$

$$=\iint\limits_{0\le s\le t\le 1}f(1-t,1-s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s=\int_0^1\mathrm{d}t\int_0^t f(1-t,1-s)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(1-x,1-y)\mathrm{d}y$$

4. 设 $f\in R[a,b]$，证明: $\int_a^b\mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_a^{x_{n-1}}f(x_n)\mathrm{d}x_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b(b-x)^{n-1}f(x)\mathrm{d}x$.

证明：重积分–累次积分

$$\int_a^b dx_1\int_a^{x_1} dx_2\cdots\int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n$$

$$=\int\limits_{a\le x_n\le x_{n-1}\le\cdots\le x_2\le x_1\le b} f(x_n)dx_1\cdots dx_n=\int\limits_{a\le x_n\le b} f(x_n)\left[\int\limits_{x_n\le x_{n-1}\le\cdots\le x_2\le x_1\le a} dx_1\cdots dx_{n-1}\right]dx_n$$

$$=\int\limits_{a\le x_n\le b} f(x_n)\left[\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\in[x_n,b]^{n-1}} dx_1\cdots dx_{n-1}\right]dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f(t)(b-t)^{n-1}dt$$

证法 2：用含参积分。令

$$F(t)=\int_a^t dx_1\int_a^{x_1} dx_2\cdots\int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n-\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx$$

则 $F(a)=0$， $F'(t)=\int_a^t dx_2\cdots\int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n-\frac{1}{(n-2)!}\int_a^t (t-x)^{n-2} f(x)dx$， $F'(a)=0$，

$F^{(k)}(t)=\int_a^t dx_{k+1}\cdots\int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n-\frac{1}{(n-k-1)!}\int_a^t (t-x)^{n-k-1} f(x)dx$， $F^{(k)}(a)=0$，

$F^{(n-1)}(t)=\int_a^t f(x_n)dx_n-\int_a^t f(x)dx=0$， $F^{(n-1)}(a)=0$． 所以 $F(t)=F(a)=0$．

5. 设 $f\in R[0,1]$． 证明： $\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz=\frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3$．

证明：

$$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz=\iiint\limits_{0\le x\le z\le y\le 1} f(x)f(y)f(z)dxdydz=\frac{1}{6}\iiint\limits_{[0,1]^3} f(x)f(y)f(z)dxdydz$$

$$=\frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3$$

6. 设 $f\in C[0,+\infty)$, $t>0$， $\Omega_t=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le h,\ x^2+y^2\le t^2\right\}$， 求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\iiint\limits_{\Omega_t}\left(z^2+f(x^2+y^2)\right)dxdydz.$$

解：在柱坐标系下， $\Omega_t=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le t,\ 0\le z\le h\right\}$，

$$F(t)=\int_0^t dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h\left[z^2+f(r^2)\right]r\,dz$$

由洛必达法则，

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\pi}{t}\int_0^h\left[z^2+f(t^2)\right]t\,dz=\pi\int_0^h\left[z^2+f(0)\right]dz=\frac{\pi h^3}{3}+\pi h f(0).$$

7. 证明： $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$．

证明：记 $D=[a,b]\times[a,b]$． 则

$$2\left[\int_a^b[f(x)]^2dx\int_a^b[g(x)]^2dx-\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\right]$$

$$=\int_a^b[f(x)]^2dx\int_a^b[g(y)]^2dy+\int_a^b[f(y)]^2dy\int_a^b[g(x)]^2dx-2\int_a^b f(x)g(x)dx\int_a^b f(y)g(y)dx$$

$$=\iint\limits_{[a,b]^2}[f(x)]^2[g(y)]^2+[f(y)]^2[g(x)]^2-2f(x)g(x)f(y)g(y)dxdy=\iint\limits_{[a,b]^2}\begin{vmatrix} f(x) & f(y)\\ g(x) & g(y)\end{vmatrix}^2 dxdy\ge 0$$

最后的不等式中，等号成立当且仅当对除面积为零的集合外的所有(x,y)，$\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix}=0$.