第五次习题课参考解答 含参积分

一、含参积分

1. 求解下列各题：

(1) 求极限 $I=\lim\limits_{y\to0^+}\int_0^1\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx.$

解：令 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{x\ln(1+xy)}{xy}}}, & 0\le x\le1,\ 0<y\le1,\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & 0\le x\le1,\ y=0.\end{cases}$

$\dfrac{\ln(1+t)}{t}=\dfrac{1}{t}\int_0^t\dfrac{1}{1+s}\mathrm{d}s=\int_0^1\dfrac{1}{1+tu}\mathrm{d}u$，$\varphi(t,u)=\dfrac{1}{1+tu}$ 是 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上的连续函数，所以 $\int_0^1\dfrac{1}{1+tu}\mathrm{d}u$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 是连续函数，因此 $g(t)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+t)}{t}, & t>0,\\ 1, & t=0\end{cases}$ 是连续函数，

$f(x,y)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{xg(xy)}}$ 是连续函数，故

$I=\lim\limits_{y\to0^+}\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x,0)\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}=\left[\ln u-\ln(1+u)\right]\Big|_1^{\mathrm{e}}=\ln\dfrac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}.$

(2) 设 $f(x)=\int_0^x\left[\int_t^x\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$，求 $f'(x)$ 与 $f(x)$.

解：令 $\varphi(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$，则 φ 可微，且 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x\varphi(x)-\varphi(t)\,\mathrm{d}t=x\varphi(x)-\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t=x\varphi(x)-t\varphi(t)\Big|_0^x+\int_0^x t\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^x t\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)\end{aligned}$$

这其实不用含参积分的知识。

(3) 求 $x\to0$ 时，$f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$ 的近似表达式.

解：令 $F(x,u,v)=\int_v^u\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$. 则 $f(x)=F(x,\cos x,\sin x)$.

$$\begin{aligned}f'(x)&=F_x(x,\cos x,\sin x)+F_u(x,\cos x,\sin x)(-\sin x)+F_v(x,\cos x,\sin x)\cos x\\&=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\right]\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{x\sqrt{1-\cos^2x}}(-\sin x)-\mathrm{e}^{x\sqrt{1-\sin^2x}}(\cos x)\\&=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y-\mathrm{e}^{x|\sin x|}\sin x-\mathrm{e}^{x|\cos x|}\cos x\end{aligned}$$

$$f'(0)=\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y-1=\frac{\pi}{4}-1,\quad f(0)=\int_0^1\mathrm{d}y=1,$$

所以 $f(x)=1+\left(\dfrac{\pi}{4}-1\right)x+o(x),\quad x\to0$.

2. 试求 a, b 之值，使积分 $\int_1^3(a+bx-x^2)^2\mathrm{d}x$ 达到最小值。

解：令 $F(a,b)=\int_1^3 (a+bx-x^2)^2\mathrm{d}x$. 则

$$F_a(a,b)=\int_1^3 2(a+bx-x^2)\mathrm{d}x=0,$$

$$F_b(a,b)=\int_1^3 2(a+bx-x^2)x\mathrm{d}x=0$$

可求得 (a,b). $F(a,b)=\int_1^3 (a+bx-x^2)^2\mathrm{d}x$ 是严格凸函数，所以驻点就是唯一最小值点。

这个多项式的积分可以直接计算，无需含参积分。

$$\begin{aligned}\int_1^3 (a+bx-x^2)^2\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 (a+b(2+t)-(2+t)^2)^2\mathrm{d}t=\int_{-1}^1 (a+2b-4+(b-4)t+t^2)^2\mathrm{d}t\\ &=\int_{-1}^1 (a+2b-4)^2+(b-4)^2t^2+2(a+2b-4)t^2+t^4\mathrm{d}t\\ &=\cdots\end{aligned}$$

3. 计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$, $\left(|a|<1\right)$

解：$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1+a\cos x\right)\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1-a\cos x\right)\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$

$x=\frac{\pi}{2}$ 是瑕点吗？

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1+a\cos x\right)\frac{\mathrm{d}x}{\cos x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\int_0^a\left(\ln\left(1+t\cos x\right)\right)'_t\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\frac{1}{1+t\cos x}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &=\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+t\cos x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+t)+(1-t)\tan^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}t\\ &=\int_0^a\int_0^1\frac{1}{(1+t)+(1-t)s^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\pi-\arcsin a\right)\arcsin a\end{aligned}$$

1分解为平方和
cosx分解为平方差

所以 $I=\pi\arcsin a$.

4. 设 $f(t)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+t^2}dx,\quad(0\le t\le 1)$，讨论 $f'(t)$.

解：$f(0)=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=-1$.

分部积分

$$f(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\ln\left(x^2+t^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\ln(x^2+t^2)\Big|_{x=0}^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x^2}{x^2+t^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)-\left(1-t\arctan\frac{1}{t}\right),$$

当 $t\neq 0$ 时，$f(t)$ 是 C^∞ 函数，$f'(t)=\frac{t}{1+t^2}+\arctan\frac{1}{t}+t\frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}=\arctan\frac{1}{t}$.

$\lim\limits_{t\to 0}f(t)=-1$，因此 f 在 $t=0$ 处连续。

$$f'_{\pm}(0)=\lim_{t\to 0^{\pm}}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^{\pm}}\left(\frac{\ln(1+t^2)}{2t}+\arctan\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0^{\pm}}\frac{t}{1+t^2}+\lim_{t\to 0^{\pm}}\arctan\frac{1}{t}=\pm\frac{\pi}{2}.$$

对 $t\neq 0$， $\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}\ln\sqrt{x^2+t^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}\mathrm{d}x=\arctan\frac{1}{t}$，

对 $x\neq 0$， $\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\sqrt{x^2+t^2}\right)_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\sqrt{x^2+t^2}-\ln\sqrt{x^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\sqrt{1+\frac{t^2}{x^2}}}{t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t}{x^2}=0$，

对 $t=0$， $\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\sqrt{x^2+t^2}\right)\Big|_{t=0}\mathrm{d}x=\int_0^1 0\mathrm{d}x=0$，

所以，在 $t=0$ 处求导时，积分与求导不能交换顺序。

5. 求定积分 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$

解：

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+tx)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+tx)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+t)\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{\pi}{8}\ln(1+t^2)+\frac{\ln 2}{2}\arctan t\right)\Big|_0^1-I$$

从而 $I=\frac{\pi\ln 2}{8}.$

6. 计算积分 $I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$.

解：由于 $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}=a,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}=0$，

故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$ 是定积分。

显然 $I(0)=0$，且 $I(a)$ 是奇函数。容易验证，对于上述积分，积分号下求导定理的条件满足。

于是我们有 $I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}$. 以下求这个积分。

当 $a>0$ 时，令 $u=a\tan x$. 则 $dx=\frac{adu}{a^2+u^2}$. 于是

$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}=\int_0^{+\infty}\frac{adu}{(1+u^2)(a^2+u^2)}$. 由于

$\frac{a}{(1+u^2)(a^2+u^2)}=\frac{a}{1-a^2}\left(\frac{1}{a^2+u^2}-\frac{1}{1+u^2}\right)$. 因此不难求出 $I'(a)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+a}$.

注意到 $I(0)=0$. 于是我们得到 $I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$.

又 $I(a)$ 是奇函数。故

$I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(a)\ln(1+|a|)$， $\forall a\in(-\infty,+\infty)$.

7. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一阶偏导数存在。若 $f_y'(x,y),\ f_{yx}''(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$，证明：

$f_{xy}''(x,y)=f_{yx}''(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$

证明：令 $F(x,y)=f_y'(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$. 因为 $f_y'(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$，则对任意的 $c,\ y\in\mathbb{R}$，

$$f(x,y)-f(x,c)=\int_c^y F(x,t)dt.$$

注意到 $F(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$, 且 $F_x'(x,y)=f_{yx}''(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$，故上述含参定积分可积分号下求导，所以

$$f_x'(x,y)-f_x'(x,c)=\int_c^y F_x'(x,t)dt.$$

再由变上限积分可知，右边关于 y 可导，从而 $f_{xy}''(x,y)=F_x'(x,y)=f_{yx}''(x,y)$. 证毕

8. 已知 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\mathrm{d}\theta=2\pi\ \ (0<r<1).$

求 $I(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\mathrm{d}\theta,\quad (0<r\neq 1).$

解：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\right)\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{-2r(1-2r\cos\theta+r^2)-(1-r^2)(-2\cos\theta+2r)}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{-2r(1-2r\cos\theta+r^2)+4r^2\cos\theta+2(1-r^2)\cos\theta-2r(1-r^2)}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{-4r+2(1+r^2)\cos\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}\mathrm{d}\theta$$

任取 $r_0\in(0,1)$. 由于函数 $\ln(1-2r\cos\theta+r^2)$ 及对 r 的导函数关于 r 在 $[0,r_0]$ 上连续，故

$$I'(r)=\int_0^{2\pi}\frac{2(r-\cos\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta=\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}(1-\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2})d\theta=0.$$

所以 $I(r)=c,\ r\in[0,r_0]$. 由于

$$\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\in C([0,r_0]\times[0,2\pi]),$$

故 $I(r)\in C[0,r_0]$，由于 r_0 的任意性，有 $I(r)=c,\ r\in[0,1)$. 又知 $I(0)=0$，因此 $c=0$ 且 $I(r)=0,\ r\in[0,1)$.

现设 $r>1$. 则 $\dfrac{1}{r}<1$ 且

$$\begin{aligned}0&=I(\frac{1}{r})=\int_0^{2\pi}\ln(1-\frac{2}{r}\cos\theta+\frac{1}{r^2})d\theta=\int_0^{2\pi}\ln\frac{1-2r\cos\theta+r^2}{r^2}d\theta\\&=I(r)-4\pi\ln r,\end{aligned}$$

所以 $I(r)=4\pi\ln r,\ (r>1).$ 解答完毕

二、含参广义积分

9. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\int_1^a\left(\mathrm{e}^{-tx^2}\right)_t'\mathrm{d}t\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\int_1^a\mathrm{e}^{-tx^2}x\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&=-\int_1^a\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_1^a\int_0^{+\infty}\frac{1}{2t}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-tx^2}\right)_x\mathrm{d}t\\&=\int_1^a\frac{1}{2t}\mathrm{e}^{-tx^2}\Big|_{x=0}^{+\infty}\mathrm{d}t=-\int_1^a\frac{1}{2t}\mathrm{d}t=-\frac{\ln a}{2}\end{aligned}$$

请说明每一步的理由。

======

以下供学有余力的同学选做。

10. 计算 Dirichlet 积分 $D(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ 的值。

解：当 $\alpha=0$ 时， $D(\alpha)=0$；

当 $\alpha>0$ 时，因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha$， 因此 $\frac{\sin\alpha x}{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界，

又 $|\int_0^t\sin\alpha xdx|=|\frac{1-\cos\alpha t}{\alpha}|\le\frac{2}{\alpha}$， 由 Dirichlet 判别法知，无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ 收敛，

而 $D(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}d\alpha x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=D(1)$ ； 若 $\alpha<0$ ， 则 $\alpha=-|\alpha|$, 且 $\sin\alpha x=-\sin|\alpha|x$，所以 $D(\alpha)=-D(1)$，这样

$$D(\alpha)=\begin{cases}D(1), & \alpha>0,\\0, & \alpha=0,\\-D(1), & \alpha<0.\end{cases}$$

令 $I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx$ 且 $f(x,y)=e^{-yx}\frac{\sin x}{x}$. 因为 $\lim\limits_{x\to0}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}=1$ ， 令 $f(0,y)=1$ ， 则 $f(x,y)\in C([0,+\infty)\times[0,n])$，其中 n 是任意的自然数。因为 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛，e^{-yx} 关于 x 单调，且 $|e^{-yx}|\le1$（关于 y 一致有界），因此由 Able 判别法知 $I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx$ 在 $[0,n]$ 上一致收敛，故 $I(y)$ 在 $[0,n]$ 上连续，从而 $I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. 对任意的 $y_0\in(0,n)$，存在 $\delta>0$ 使得 $[y_0-\delta,y_0+\delta]\subset(0,n)$. 因为 $|e^{-yx}\sin x|\le e^{-(y_0-\delta)x}$， 而

$$\int_0^{+\infty} e^{-(y_0-\delta)x}dx = \frac{1}{y_0-\delta} \text{ 收敛，}$$

由 Weirerstrass 判别法知，$\int_0^{+\infty} e^{-yx}\sin x dx$ 在$[y_0-\delta, y_0+\delta]$上一致收敛。又

$$e^{-yx}\sin x \in C([0,+\infty)\times[y_0-\delta, y_0+\delta])\text{，}$$

因此由含参无穷积分的可导性，

$$I^{'}(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-yx}\sin x dx = -1+\int_0^{+\infty} y^2 e^{-yx}\sin x dx\text{，}$$

所以对任意的 $y\in(0,n]$， $I^{'}(y) = -\dfrac{1}{1+y^2}$ ，从而 $I(y)-I(n) = -\arctan y+\arctan n$ ，这样 $I(0) = \lim\limits_{y\to 0} I(y) = I(n)+\arctan n$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n = \dfrac{\pi}{2}$，且

$$|I(n)|\le \int_0^{+\infty} e^{-nx}\frac{|\sin x|}{x}dx \le \int_0^{+\infty} e^{-nx}dx = \frac{1}{n}\to 0 \ (n\to\infty)\text{，}$$

因此$I(0) = \dfrac{\pi}{2}$. 故 $D(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha.$

解法二、计算无穷积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 的值。【引入参数，两个积分限都是无限区间，用到书上定理 2.3.4】

解：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{+\infty}\sin x dx\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{xy}}dy = \int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^{xy}}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}dy = \frac{\pi}{2}$，其中

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^{xy}}dx &= -\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{xy}}d\cos x = -\frac{\cos x}{e^{xy}}\Big|_0^{+\infty} - y\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{e^{xy}}dx = 1-y\int_0^{+\infty}\frac{d\sin x}{e^{xy}} \\ &= 1-\frac{\sin x}{e^{xy}}\Big|_0^{+\infty} - y^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^{xy}}dx = 1-y^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^{xy}}dx\end{aligned}$$

所以$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^{xy}}dx = \frac{1}{1+y^2}$.

11. 计算两个 Laplace 积分：

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad J(\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad \alpha>0\text{，}\beta>0.$$

解：当 $\delta>0$ 时，因为 $\left|\int_0^A \sin\beta x dx\right| \le \dfrac{2}{\delta}$，并且 $\dfrac{x}{x^2+\alpha^2}$ 在 $\beta\in[\delta,+\infty)$ 上单调一致 收攻趋于零，由 Dirichlet 判别法，积分 $J(\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$ 在 $\beta\in[\delta,+\infty)$ 上一致收敛。

$$I^{'}(\beta) = -\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$$

$$I^{'}(\beta)+\frac{\pi}{2} = -\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx + \int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx = \alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x\left(x^2+\alpha^2\right)}dx$$

由于 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$ 对于 $\beta\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛,

$\left[I'(\beta)+\frac{\pi}{2}\right]'=\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$，即: $I''(\beta)=\alpha^2 I(\beta)$ 。

由此, 我们得到: $I(\beta)=C_1e^{\alpha\beta}+C_2e^{-\alpha\beta}$ 。

又因为: $|I(\beta)|\le\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$, 所以 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}I(\beta)=0$, 代回到上面 $I(\beta)$ 的表达式中, 我们有 $C_1=0$, 因此 $I(\beta)=C_2e^{-\alpha\beta}$ 。

最后，考虑到 $\lim\limits_{\beta\to0^+}I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$, 推出 $C_2=\frac{\pi}{2\alpha}$, 即: $I(\beta)=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$ 。

即: $I(\beta)=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$ 。

而当 $\beta>0$ 时, $J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx=-I'(\beta)=-\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$, 因此, 一般地: 因而 $J(\beta)=-\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}\operatorname{sgn}\beta$ 。

12. 计算下面的含参广义积分（注：$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$）.

计算积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos2\beta xdx$ 。

令: $I(\beta)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos2\beta xdx$,

$I'(\beta)=-\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\sin2\beta xdx$, 对于 $\beta\in(-\infty,+\infty)$ 一致收玫。因此:

$I'(\beta)=\int_0^{+\infty}\sin2\beta xde^{-x^2}=-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cdot2\beta\cos2\beta xdx=-2\beta I(\beta)$,

求得: $I(\beta)=Ce^{-\beta^2}$, 再利用 $I(0)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

我们有: $I(\beta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}$, 即: $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos2\beta xdx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}$ 。