习题课 205 参考解答：条件极值

1. 求原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 1$ 的最短距离.

分析：所求问题实际上是在曲面 $z^2 = xy + x - y + 1$ 上求函数 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最小值。

解法 1：用 Lagrange 乘子法，令 $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(z^2 - xy - x + y - 1)$. 则

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \lambda) = 2x - \lambda(-y-1) = 0 \\ F_y(x, y, z, \lambda) = 2y - \lambda(-x+1) = 0 \\ F_z(x, y, z, \lambda) = 2z - 2\lambda z = 0 \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) = -(z^2 - xy - x + y - 1) = 0 \end{cases}$$

由第三个方程得到 $\lambda = 1$ 或 $z = 0$.

于是(I) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ \lambda = 1 \\ z^2 + 2 = 0 \end{cases}$ （无解）或者(II) $\begin{cases} x(1-x) = y(-y-1) \\ 2y - \lambda(-x+1) = 0 \\ z = 0 \\ xy + x - y + 1 = 0 \end{cases}$，

后者即 $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2y - \lambda(-x+1) = 0 \\ z = 0 \\ xy + x - y + 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2y - \lambda(-x+1) = 0 \\ z = 0 \\ xy + x - y + 1 = 0 \end{cases}$，

即 $\begin{cases} y = -1 \mp \sqrt{2} \\ \lambda = \mp 2\sqrt{2}\left(-1 \mp \sqrt{2}\right) = 4 \pm 2\sqrt{2} \\ z = 0 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2y - \lambda(-x+1) = 0 \\ z = 0 \\ y^2 + y + 2 = 0 \end{cases}$ （无解）

所以唯一临界点为 $(x, y, z) = (1 \pm \sqrt{2}, -1 \mp \sqrt{2}, 0)$，此时 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}(\sqrt{2} \pm 1) = 2 \pm \sqrt{2}$.

很明显当 $x \to \infty$ 或 $y \to \infty$，$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to +\infty$.

所以在曲面 $z^2 = xy + x - y + 1$ 上，$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 无上界，从而没有最大值，但是有最小值。

这个最小值为 $2 - \sqrt{2}$.

解法 2：把约束条件解得的 z^2 代入目标函数，$f(x, y) = x^2 + y^2 + \left(xy + x - y + 1\right)$ 的最小值。

$f_x(x, y) = 2x + y + 1$，$f_y(x, y) = 2y + x - 1$.

由方程组 $f_x = f_y = 0$ 求得唯一解 $(x, y) = (-1, 1)$.

函数 $f(x,y)$ 在任意点的的 Hesse 矩阵都是常数矩阵$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，它是正定矩阵，所以 $f(x,y)$ 是严格凸函数，其临界点 $(x,y)=(-1,1)$ 是唯一的最小值点，最小值为 $f(-1,1)=0$. 所求最小距离值为 0.

请找出解法 2 中的错误。

2. 在周长为 $2p$ 的三角形中求出满足下述要求的三角形：绕自己的一边旋转时所形成的旋转体的体积最大。

解：设三角形三条边的长度分别为 x,y,z，其中长度 x 的边是旋转轴，该边上的高为 h.
则 $x+y+z=2p$，

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0<x<p,0<y<p,0<z<p,x+y+z=2p\}.$$

由三角形面积的海伦公式知 $S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}=\frac{1}{2}xh$. 由此解得

$$h=\frac{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}}{x}$$

于是所求旋转体的体积为 $V=V(x,y,z)=\frac{1}{3}\pi h^2 x=\frac{4\pi}{3}\frac{p(p-x)(p-y)(p-z)}{x}$.

令 $F(x,y,z,\lambda)=V(x,y,z)-\lambda(x+y+z-2p)$. 于是

$$\begin{cases} F_x=-\frac{4\pi}{3}\frac{p^2(p-y)(p-z)}{x^2}-\lambda=0 \\ F_y=-\frac{4\pi}{3}\frac{p(p-x)(p-y)}{x}-\lambda=0 \\ F_z=-\frac{4\pi}{3}\frac{p(p-x)(p-z)}{x}-\lambda=0 \\ F_\lambda=-(x+y+z-2p)=0 \end{cases}$$

由(2,3)两个方程得 $y=z$，由(4)得 $x=2(p-y)$，代入(1)，最终得到 $x=\frac{p}{2},\ y=z=\frac{3p}{4}$.

$V(\frac{p}{2},\frac{3p}{4},\frac{3p}{4})=\frac{\pi}{12}p^3$ 是最大值：

$$\begin{aligned} V(x,y,z)&=\frac{4\pi}{3}\frac{p(p-x)(p-y)(p-z)}{x} \\ &\le\frac{4\pi}{3}\frac{p(p-x)\left(\frac{(p-y)+(p-z)}{2}\right)^2}{x} \\ &=\frac{\pi}{3}p(p-x)x\le\frac{\pi}{12}p^3 \end{aligned}$$

3. 求平面 $x+y-z=0$ 与圆柱面 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0$ 相交所成椭圆的面积。

分析：(1)如果求得椭圆的长、短半轴长分别为 a,b，则椭圆的面积 $S=\pi ab$.

(2) 由圆柱面方程看到，此圆柱关于坐标原点是对称的，故此圆柱的中心轴为通过坐标原点

的某一直线.

(3) 因为平面 $x+y-z=0$ 通过坐标原点，所以此平面上的椭圆截线以坐标原点为其中心点。据此分析，椭圆上任意一点到坐标原点距离的最大、最小值即为所求。

解法 1：令 $L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y-z)-\mu(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1)$，

解方程组 $\begin{cases} L_x' = 2x-\lambda-2\mu x+\mu y+\mu z=0 \\ L_y' = 2y-\lambda-2\mu y+\mu x+\mu z=0 \\ L_z' = 2z+\lambda-2\mu z+\mu y+\mu x=0 \\ x+y-z=0 \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0 \end{cases}$

整理得 $\begin{cases} (2-2\mu)x-\lambda+\mu y+\mu z=0 & (1) \\ (2-2\mu)y-\lambda+\mu x+\mu z=0 & (2) \\ (2-2\mu)z+\lambda+\mu y+\mu x=0 & (3) \\ x+y-z=0 & (4) \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0 & (5) \end{cases}$

将 $(1)x+(2)y+(3)z$，得

$$2(x^2+y^2+z^2)-\lambda(x+y-z)-2\mu(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0,$$

将 $(4),(5)$ 带入上式，得 $x^2+y^2+z^2=\mu$，故 μ 是 $x^2+y^2+z^2$ 的极值，问题转而去求 μ，为此，从方程 $(1)-(4)$ 中消去 λ，(2)+(3), (1)+(3)与(4)联立，得

$$\begin{cases} 2\mu x+(2-\mu)y+(2-\mu)z=0 \\ (2-\mu)x+2\mu y+(2-\mu)z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

上述方程组有非零解的充要条件是系数矩阵行列数为零，故

$$\begin{vmatrix} 2\mu & 2-\mu & 2-\mu \\ 2-\mu & 2\mu & 2-\mu \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

所以 $\mu^2-\dfrac{20}{3}\mu+4=0$，从而该方程的两个根就是 $x^2+y^2+z^2$ 的极大、极小值，而两根之积为 4，所以椭圆的面积是 2π.

解法 2：在上述解法中求得 $x^2+y^2+z^2=\mu$ 之后，为求 μ，将上述方程 (1)-(4) 看成是关于变量 (x,y,z,λ) 的方程，由于方程 (5) 表明 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$，因此方程 (1)-(4) 构成的齐次线性方程组有非零解，故

$$\begin{vmatrix} 2-2\mu & \mu & \mu & -1 \\ \mu & 2-2\mu & \mu & -1 \\ \mu & \mu & 2-2\mu & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

解得 $\mu_1=6,\ \mu_2=\dfrac{2}{3}$，所以椭圆的面积是 2π.

4. 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6,\\4x+2y+z=30,\end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值。

解:令 $L(x,y,z)=z+\lambda\left(x^2+2y^2-z-6\right)+\mu\left(4x+2y+z-30\right)$. 解方程组

$$\begin{cases}L_x'=2\lambda x+4\mu=0\\L_y'=4\lambda y+2\mu=0\\L_z'=1-\lambda+\mu=0\\x^2+2y^2-z-6=0\\4x+2y+z-30=0\end{cases}$$

解得 $\mu=-\dfrac{\lambda x}{2}=-2\lambda y$， $1=\lambda-\mu=\lambda(1+2y)$，所以 $\lambda\neq 0$，从而 $x=4y$.

由 $\begin{cases}x-4y=0\\x^2+2y^2-z-6=0\\4x+2y+z-30=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-4y=0\\18y^2-z-6=0,\\18y+z-30=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-4y=0\\y^2+y-2=0\\18y+z-30=0\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=4\\y=1\\z=12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-8,\\y=-2,\\z=66.\end{cases}$ 因此 z 的最大值为 66.

5. 曲面 $\mathrm{e}^{-(x+y+z)}+x^2+y^2+z^2=\dfrac{5}{2}$. 求 z 的极值（最值）。

解：记 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}+x^2+y^2+z^2-\dfrac{5}{2}$， $K=\{(x,y,z)\,|\,F(x,y,z)\le 0\}$.

由于 F 是严格凸函数，所以 K 是凸集。

由于 $x^2+y^2+z^2<F(x,y,z)+\dfrac{5}{2}\le\dfrac{5}{2}$，所以 K 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个有界闭闭集。K 与 z 轴的交集是 z 轴上的有界闭凸集，从而 $A=\{z\,|\,\text{存在}x,y\text{使得}F(x,y,z)\le 0\}$ 是有界闭区间，有最大值和最小值。

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y+z)}(-1-z_x)+2x+2zz_x=0\\\mathrm{e}^{-(x+y+z)}(-1-z_y)+2y+2zz_y=0\end{cases}$$

令 $z_x=z_y=0$，得到 $\begin{cases}2x=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}\\2y=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}\end{cases}$，从而 $x=y,\ z=-2x-\ln(2x)$，

代回原方程得到 $2x+x^2+x^2+(-2x-\ln(2x))^2=\dfrac{5}{2}$. 易见 $x=\dfrac{1}{2}$ 是这个方程的一个解，此时 $x=y=\dfrac{1}{2},z=-1$.

另外，$e^{-(x+y+z)}+x^2+y^2+z^2$ 在 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$ 处的梯度为 $(0,0,-1)$，所以根据隐函数定理 $e^{-(x+y+z)}+x^2+y^2+z^2=\frac{5}{2}$ 在 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$ 的一个邻域中确定了一个 C^∞ 隐函数，$(x,y)=(0,0)$ 是这个隐函数的一个临界点。

对 $\begin{cases} e^{-(x+y+z)}(-1-z_x)+2x+2zz_x=0 \\ e^{-(x+y+z)}(-1-z_y)+2y+2zz_y=0 \end{cases}$ 进一步求导，得到

$$\begin{cases} e^{-(x+y+z)}\left[(-1-z_x)^2-z_{xx}\right]+2+2z_x^2+2zz_{xx}=0 \\ e^{-(x+y+z)}\left[(-1-z_y)(-1-z_x)-z_{xy}\right]+2z_xz_y+2zz_{xy}=0 \\ e^{-(x+y+z)}\left[(-1-z_y)^2-z_{yy}\right]+2+2z_y^2+2zz_{yy}=0 \end{cases},$$

代入 $x=y=\frac{1}{2},z=-1$ 以及 $z_x=z_y=0$ 得到

$\begin{cases} \left[1-z_{xx}\right]+2-2z_{xx}=0 \\ \left[1-z_{xy}\right]-2z_{xy}=0 \\ \left[1-z_{yy}\right]+2-2z_{yy}=0 \end{cases}$ 从而 $z_{xx}=z_{yy}=1, z_{xy}=\frac{1}{3}$，所以 $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 是这个隐函数的极小值点，$z=-1$ 是极小值，它实际上是最小值。

当 $x=y\approx 0.09$ 时，z 取最大值（≈ 1.535）.

6. 若 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$，$f'_x(x,0)=(x+1)e^x$，$f(0,y)=y^2+2y$. 求 $f(x,y)$ 的极值。

解：因为 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$，因此

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= f'_x(x,0)+\int_0^y f''_{xy}(x,v)\mathrm{d}v \\ &= (x+1)e^x+\int_0^y 2(v+1)e^x\,\mathrm{d}v \\ &= (x+1)e^x+(y^2+2y)e^x = e^x[x+(y+1)^2], \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,y)+\int_0^x f'_x(u,y)\mathrm{d}u \\ &= y^2+2y+\int_0^x (u e^u+(y+1)^2 e^u)\mathrm{d}u \\ &= x e^x+(y^2+2y)e^x. \end{aligned}$$

所以 $f'_y(x,y)=2(y+1)e^x$. 令 $f'_y(x,y)=0$ 解得 $y=-1$，再由 $f'_x(x,y)=0$ 解得 $x=0$. 故唯一的驻点是 $(x,y)=(0,-1)$. 由于 $f''_{xx}(0,-1)=2,\ f''_{xy}(0,-1)=0,\ f''_{yy}(0,-1)=2$，这样

$$f''_{xx}(0,-1)f''_{yy}(0,-1)-(f''_{xy}(0,-1))^2=4>0,\ \ f''_{xx}(0,-1)=2>0,$$

所以 $(0,-1)$ 是函数的极小值点，且极小值 $f(0,-1)=-1$.

7. 求函数 $z=xy(4-x-y)$ 在由三条直线 $x=1$， $y=0$ 和 $x+y=6$ 所围有界闭区域上的最大值。

解法 1： $D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 6-y, 0\le y\le 5\}$

$$z'_x=y(4-x-y)-xy=y[(4-y)-2x]$$

当 $x\le\dfrac{4-y}{2}$ 时， z 关于 x 严格增；当 $x>\dfrac{4-y}{2}$ 时， z 关于 x 严格减。

$\dfrac{4-y}{2}\ge 6-y$ 当且仅当 $y\ge 8$，因此对 $0\le y\le 5$，总有 $6-y\ge\dfrac{4-y}{2}$.

$\dfrac{4-y}{2}\ge 1$ 当且仅当 $y\le 2$.

所以当 $0\le y\le 2$ 时， $\dfrac{4-y}{2}\in[1,6-y]$， z 关于 x 在 $x=\dfrac{4-y}{2}$ 时取得（相对）最大值。

由一元微积分知 $z(\dfrac{4-y}{2},y)=\left(\dfrac{4-y}{2}\right)^2 y$ 在 $y=\dfrac{4}{3}$（此时 $x=\dfrac{4}{3}$）处取得最大值 $z(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3})=\dfrac{64}{27}$.

当 $2\le y\le 5$ 时， z 关于 x 在区间 $[1,6-y]$ 上严格减， z 在 $x=1$ 时取得（相对）最大值。

由一元微积分知 $z(1,y)=y(3-y)$ 在 $y=\dfrac{3}{2}$ 处取得最大值 $z(1,\dfrac{3}{2})=\dfrac{9}{4}$.

因此 $z(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3})=\dfrac{64}{27}$ 是最大值。

解法 2：记由三条直线 $x=1$, $y=0$ 和 $x+y=6$ 所围的有界开区域为 D，有界闭区域为 $\bar{D}$.

(I) 求函数 $z(x,y)$ 在区域 D 内的极值．令

$$\begin{cases} z'_x=4y-2xy-y^2=0 \\ z'_y=4x-x^2-2xy=0 \end{cases}$$

求得驻点 $(0,0)$, $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$, $(0,4)$, $(4,0)$，在 D 内的驻点为 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$.

(II) 求函数 $z(x,y)$ 在边界上的最值。区域 D 的边界由三条直线段构成。这对应着如下的三个条件极值问题：

(1) 求函数 $xy(4-x-y)$ 在约束条件 $x=1$ 下的极大值；

(2) 求函数 $xy(4-x-y)$ 在约束条件 $y=0$ 下的极大值；

(3) 求函数 $xy(4-x-y)$ 在约束条件 $x+y=6$ 下的极大值。

问题(1). 将 $x=1$ 代入 $z=xy(4-x-y)$ 得一元函数 $z=y(3-y)$．令 $z'=3-2y=0$，解得驻点 $(1,\ 3/2)$．对应函数值为 $z=\dfrac{9}{4}$.

问题(2). 将 $y=0$ 代入 $z=xy(4-x-y)$，得 $z=0$.

问题(3). 作 Lagrange 函数 $L=xy(4-x-y)+\lambda(x+y-6)$．令

$$\begin{cases} L_x' = 4y - 2xy - y^2 + \lambda = 0 \\ L_y' = 4x - x^2 - 2xy + \lambda = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

解这个方程组求得函数在边界 $x+y=6$ 上有驻点 $(3,3)$. 于是我们得到函数在闭区域 $\bar{D}$ 上有驻点 $(4/3,\ 4/3)$，$(1,\ 3/2)$ 和 $(3,\ \ 3)$. 函数也可能在三个角点 $(1,0),(6,0),(1,5)$ 上取得最值。

由于函数 $z = xy(4-x-y)$ 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上连续，故函数在 $\bar{D}$ 上的最大值和最小值在这六个点上取得。计算函数在这六个点上的函数值可知，函数 $z(x,y)$ 在点 $(4/3,\ \ 4/3)$ 处取得最大值 $z(4/3,\ 4/3) = 64/27$. 在点 $(3,\ \ 3)$ 处取得最小值 $z(3,\ \ 3) = -18$. 解答完毕。

8. 设 $S: F(x,y,z)=0$ 是光滑曲面，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 S 外一点。证明：若 $Q \in S$ 使得线段 P_0Q 是 P_0 与曲面 S 上任意一点的连线中最短线段，则向量 $\overline{P_0Q}$ 必与曲面在该点的切平面垂直。

证明：所求问题就是在曲面上求一点 $Q(x,y,z) \in S$ 使得 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$ 的值最小。令

$$L(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - \lambda F(x,y,z),$$

解方程组 $\begin{cases} L_x' = 2(x-x_0) - \lambda F_x' = 0 \\ L_y' = 2(y-y_0) - \lambda F_y' = 0 \\ L_z' = 2(z-z_0) - \lambda F_z' = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$

得 $\overline{P_0Q} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = \dfrac{\lambda}{2}\mathrm{grad}F(x,y,z)$，即向量 $\overline{P_0Q}$ 与曲面 S 在点 $Q(x,y,z)$ 处的法向量平行，所以向量 $\overline{P_0Q}$ 与曲面 S 在点 $Q(x,y,z)$ 处的切平面垂直。 证毕

讨论：为什么有最小距离？