第二次习题课题目(复合函数链式法则、高阶偏导数、方向导数)

多元函数一阶微分的形式不变性：

设 $w=w(u,v),\ u=u(x,y,z),\ v=v(x,y,z)$ 均连续可微，则将 w 看成 x,y,z 的函数，有

$$\mathrm{d}w=\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z\,.$$

另一方面，由复合函数的链式法则，

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\,,$$

代入 $\mathrm{d}w=\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z$ 中，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}w&=\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z\\
&=\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}z\\
&=\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\\
&=\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

变量 w 无论是作为变量 u,v 的函数，还是作为变量 x,y,z 的函数，变量 w 的微分

$$\mathrm{d}w=\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z$$

都是 w 对所有“自变量”的偏微分的和，无论这些“自变量”是真正的自变量，还是复合过程中的中间变量，这叫做一阶微分的形式不变性。

一阶微分的形式不变性等价于链索法则

$$\mathrm{d}w=\frac{\partial w}{\partial(u,v)}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}=\frac{\partial w}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}=\frac{\partial w}{\partial(x,y,z)}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{pmatrix}.$$

在 Jacobi 矩阵的表示 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}$ 中，上面是行变量，下面是列变量。

微分的形式不变性说明微分是不依赖于坐标系的具有几何属性的对象，即曲面具有切平面的性质以及曲面的切平面都是与坐标系无关的几何属性。

第一部分：偏导数与高阶偏导数计算，链索法则

1. 设 f 可微，且 $z = x^3 f\left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $g(x) = f\left(x, \varphi\left(x^2, x^3\right)\right)$，其中函数 f 和 ϕ 的二阶偏导数连续，$\varphi(1,1) = 1$. 求 $g''(1)$.

与一元复合函数求导类似的方法
求一阶导、再算二阶导

3. 计算下列各题：

(1) 已知 $z = \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$.

换元，指数化为e的次方，对数项取出一个负号。z/x=z/t * t/x

(2) 设 $f \in C^2$ 且 $z = f(\mathrm{e}^{x+y}, xy)$. 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

换元
z/x=z/u * u/x + z/v * v/x
第二小题：上述结果再对y求导

(3) 设函数 f 二阶可导，函数 g 一阶可导. 令 $z(x,y) = f(x+y) + f(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} g(t)\mathrm{d}t$.

拆成减法

求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

直接求，打'号，复合函数求导

第二部分：最简单的偏微分方程

4. 设 $z(x,y)$ 是定义在矩形区域 $D = \{(x,y) | 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$ 上的可微函数。证明:

(1) $z(x,y) = f(y) \Leftrightarrow \forall (x,y) \in D, \dfrac{\partial z}{\partial x} \equiv 0$；

正推容易
逆推：对x方向使用微分中值定理

(2) $z(x,y) = F(y) + G(x) \Leftrightarrow \forall (x,y) \in D, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv 0$.

直接推导，利用上题结论

5. 设 $z = z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程 $A\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$，其中 A, B, C 不全为零。求 A,B,C 满足的条件，使得存在可逆线性变换 $\begin{cases} u = x + \alpha y \\ v = \beta x + y, \end{cases}$ 使原方程可转化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$.

直接变换带入，看看变成什么样，使之满足条件

6. 设 $u(x,y) \in C^2$，又 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，$u(x,2x) = x$，$u'_x(x,2x) = x^2$，求 $u''_{xx}(x,2x)$，$u''_{xy}(x,2x)$，$u''_{yy}(x,2x)$.

两边同时求，最后变为解方程

7. 设 n 为整数，若对任意的 $t > 0$，$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$，则称 f 是 n 次齐次函数。证明：可微函数 $f(x,y)$ 是 n 次齐次函数的充要条件是 $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf$.

正求：看成对t的函数，直接求导，令t=1
逆求：设F(t)=f(x,y)，求导变换，再积分

第三部分：方向导数

8. 设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微。已知 $\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{i}}-\vec{\mathbf{j}}$， $\vec{\mathbf{u}}=-\vec{\mathbf{i}}+2\vec{\mathbf{j}}$，且方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}^*}(P_0)=2$，$\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^*}(P_0)=1$，求 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的微分。

分解为在x与y方向上的偏导数
注意单位化

9. 设 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$，$P_0(1,1)$. 试求 $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}}$，并问：在怎样的方向 $\vec{l}$ 上，方向导数 $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}}$ 分别有最大值、最小值和零值。

l写为(cosθ,sinθ),在x与y方向上的偏导数的线性组合

10. 设 a,b 是实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中，沿 $\vec{l}=(-3,-4)$ 的方向导数最大，最大值为10，求 a,b.

梯度的模长最大为10，梯度即为(-6,-8)

11. 设 $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$，且 $f(x,0)>0.$

方向导数(1,-1)方向上函数值不变

试证明：对任意的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，有 $f(x,y)>0.$

12. 设 $f(x,y)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上具有连续的偏导数，$L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$（$a\le t\le b$）是 D 中的光滑曲线，L 的端点为 $A,\ B$. 证明：若 $f(A)=f(B)$，则存在点 $P_0(x_0,y_0)\in L$ 使得 $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}}=0,$ 其中 $\vec{l}$ 是曲线 L 在 P_0 的单位切向量。

二维罗尔定理，将其设为关于t的一次函数

13. (1) 证明函数 x^y 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x>0,y\in\mathbb{R}\}$ 内是 C^∞ 函数。

化为e指数，为初等函数复合

(2) 沿过点 $(1,0)$ 的每条直线上，讨论 x^y 的单调性、极值与最值。

x=tu+1
y=tv
代入，关于t的函数

挑战问题：

14. 设 $f:\mathbb{R}^3\setminus\{O\}\to\mathbb{R}$ 是可微函数。

(1) 求 f 在球极坐标下的梯度的形式。

(2) 在球极坐标下求 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ 的表达式。