微积分第24讲：微分方程应用与定性分析

2021 年 12 月 13 日

例 (饵-捕食者，Lotka(1925)–Volterra(1926))

兔子（饵，数量 x ）和狼（捕食者，数量 y ）

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda x(A - By), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mu y(Cx - D). \end{cases}$$

这里 λ, μ, A, B, C, D 都是正数。为什么？

消去时间 t，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu y(Cx - D)}{\lambda x(A - By)}$$

这是可分离变量方程，不难求得其解

$$\lambda A \ln y - \lambda By = \mu Cx - \mu D \ln x + \alpha.$$

然而，这个表达式增加了我们对这个生态系统的认知吗？

为方便研究，我们先做一些尺度变换：

$$\text{旧} \mapsto \text{新}: \quad x \mapsto \frac{D}{C}x, \quad y \mapsto \frac{A}{B}y, \quad t \mapsto \lambda At, \quad \mu \mapsto \frac{\mu}{\lambda AD},$$

则原方程组写成

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1-y), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mu y(x-1). \end{cases}$$

由这个方程组解得

$$\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)^\mu \left(\frac{\mathrm{e}^y}{y}\right) = \alpha, \qquad \alpha \text{ 是任意常数.}$$

该方程组的解由初值 $(x(t_0), y(t_0))$ 唯一确定。(x, y) 坐标平面称为这个方程组的相空间（phase space）（相空间不含时间），相空间中的点称为相点（phase point）。过相空间每个相点，有唯一曲线 $(x(t), y(t))$ 满足微分方程组，称为相轨迹（phase trajactory）。

微分方程组的右端确定了相空间中的一个向量场

$$\mathbf{v}(x, y) = (x(1-y), \mu y(x-1)) = (v_x, v_y).$$

相轨迹在时刻 t 时位于点 $(x(t), y(t))$，此时的速度向量恰好为该点处的向量 $\mathbf{v}(x(t), y(t))$。

通过微分方程组对应的向量场，我们可以了解微分方程组的解的性质。

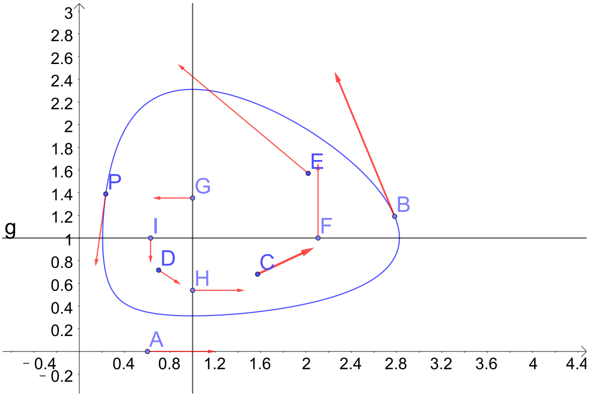


图: 饵-捕食者生态系统 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1-y), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mu y(x-1) \end{cases}$ 的相图：向量场、相轨道；

左下，右上；上左，下右

对 $x>1+\varepsilon$，$0<y<1$，

$$\ln y(t)-\ln y(t_0)=\int_{y(t_0)}^{y(t)}\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int_{t_0}^{t}\mu(x(t)-1)\mathrm{d}t\geq\varepsilon\mu(t-t_0),$$

所以

$$t\leq t_0+\frac{-\ln y(t_0)}{\varepsilon\mu},$$

另一方面，

$$\ln x(t)-\ln x(t_0)=\int_{x(t_0)}^{x(t)}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_{t_0}^{t}(1-y(t))\mathrm{d}t\leq\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t=t-t_0,$$

故

$$x(t)\leq x(t_0)\mathrm{e}^{t-t_0}\leq\frac{x(t_0)}{t_0^{\varepsilon\mu}},$$

这说明 $(x(t),y(t))$ 会在有限时间内与 $y=1$ 在有限点处相交。

类似可以证明：从线段 $x=1, 0<y<1$ 上出发的相轨道将在有限时间内绕点 $(1,1)$ 一圈后再次与该线段相交。
而
$$\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)^\mu \left(\frac{\mathrm{e}^y}{y}\right) = \alpha, \qquad \alpha \text{ 是任意常数}$$
是守恒量，在 $x=1$ 时
$$\frac{\mathrm{e}^{y(T)}}{y(T)} = \frac{\mathrm{e}^{y(0)}}{y(0)},$$
又由于 $\frac{\mathrm{e}^y}{y}$ 关于 y 在区间 $(0,1)$ 上严格单调，所以 $y(T)=y(0)$。
因此微分方程的解关于 t 是周期函数。

关于 Lotka–Volterra 模型的更多内容，可参考 Stefano Allesina 撰写的文章，A Tour of the Generalized Lotka-Volterra Model，https://stefanoallesina.github.io/Sao_Paulo_School/index.html

例 (弹簧振子)

弹簧活动端偏离平衡位置的位移为 $y(t)$，回复力大小与 $y(t)$ 的大小成正比，方向相反。

$$y'' + ky = 0.$$

这个二阶方程改写为一阶方程组

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

它的解由初始条件 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$ 决定。(y, y_1) 坐标平面（即 (y, y') 坐标平面）是这个方程组（即原二阶方程）的相空间。

对弹簧振子

$$E(y,y') = \frac{{y'}^2}{2} + \frac{ky^2}{2}$$

是机械能（动能 $\frac{{y'}^2}{2}$，弹性势能 $\frac{ky^2}{2}$）。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(y(t),y'(t)) = y'y'' + kyy' = y'(y''+ky) = 0,$$

即弹簧系统的机械能守恒。于是相轨道位于椭圆 $\frac{{y'}^2}{2} + \frac{ky^2}{2} = C$ 上，这是等能量集，也叫作能量函数的水平集。

由椭圆方程

$$\frac{{y'}^2}{2}+\frac{ky^2}{2}=C$$

解得

$$y'=\pm\sqrt{2C-ky^2},$$

从而对 $C>0$，

$$\begin{aligned}t-t_0=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t&=\int_{y(t_0)}^{y(t)}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2C-ky^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{k}}\left[\arcsin\sqrt{\frac{k}{2C}}y(t)-\arcsin\sqrt{\frac{k}{2C}}y(t_0)\right]\end{aligned}$$

若 $y(t_0)=-\sqrt{\frac{2C}{k}}$，则 $y\left(t_0+\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)=\sqrt{\frac{2C}{k}}$。再由线性知 $y\left(t_0+\frac{2\pi}{\sqrt{k}}\right)=-\sqrt{\frac{2C}{k}}$。所以 $T=\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ 是周期，它与振幅无关，只与 k 有关，这是弹簧固有属性。

Lokta-Volterra系统回顾。做坐标变换 $x = \mathrm{e}^u, y = \mathrm{e}^v$，则

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1-y), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mu y(x-1). \end{cases}$$

变为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 - \mathrm{e}^v = -v + o(v), \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mu(\mathrm{e}^u - 1) = \mu u + o(u). \end{cases}$$

在平衡态 $(x, y) = (1, 1)$（即 $(u, v) = (0, 0)$ 处）处线性化，得到近似的线性方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -v, \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mu u, \end{cases}$$

其周期为 $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$。因此对原非线性方程在平衡态 $(x, y) = (1, 1)$ 附近的解，周期 $T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$。
当 (x, y) 接近于第一象限边界时，周期 $T \to +\infty$。这与线性方程不同。

例 (阻尼振动)

阻力大小与速度 y' 成正比，方向相反，阻尼系数为 p。

$$y'' + py' + k^2 y = 0.$$

例 (电阻(R)-电感(L)-电容(C)串联电路)

电流 $I(t)$ 满足

$$I'' + \frac{R}{L} I' + \frac{1}{LC} I = 0.$$

上述二阶方程改写为一阶方程组

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

机械能

$$E(y, y') = \frac{y'^2}{2} + \frac{k^2 y^2}{2}$$

满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(y(t), y'(t)) = y'y'' + k^2 yy' = y'(y'' + k^2 y) = -py'^2 \leq 0,$$

即能量随时间 t 是单调不增的，这样的系统称为是耗散的（dissipative）。

这说明：当给定初值 $(y(t_0), y'(t_0))$ 后，对 $t > t_0$，$(y(t), y'(t))$ 位于椭圆 $\frac{y'^2}{2} + \frac{k^2 y^2}{2} = E(y(t_0), y'(t_0))$ 的内部。

二阶线性常系数齐次方程解的性质

$$y'' + py' + qy = 0.$$

如果取 $\tau = -t$，则 $y'_\tau = y'_t t'_\tau = -y'_t$，所以

$$y''_{\tau\tau} - py'_\tau + qy = 0.$$

所以，不妨设原方程中 $p \geq 0$。

二阶线性常系数齐次方程解的性质

$$y'' + py' + qy = 0$$

对应线性方程组

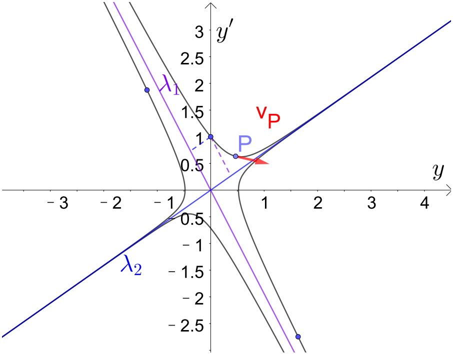
$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix},$$

设 $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ 是上述系数矩阵的特征向量，则

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -q - p\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

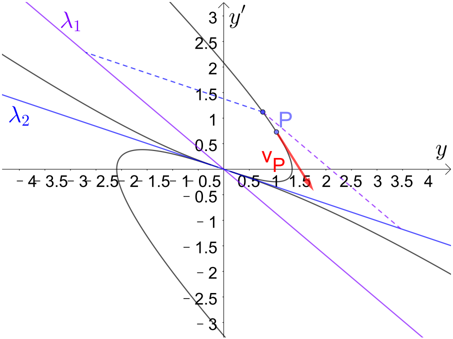
因此 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$。

当 $\Delta = p^2 - 4q > 0$ 时，存在两个相异的实特征值 λ_1, λ_2。
如果 $q < 0$，则这两个特征值异号。$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$。



平衡态 $(0, 0)$ 是鞍点，是不稳定的。

如果 $q > 0$，则这两个特征值同号。由 $p > 0$ 知，$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$。



对所有解，$\lim\limits_{t \to +\infty} (y(t), y'(t)) = (0, 0)$。

平衡态 $(0, 0)$ 是渐近稳定的。

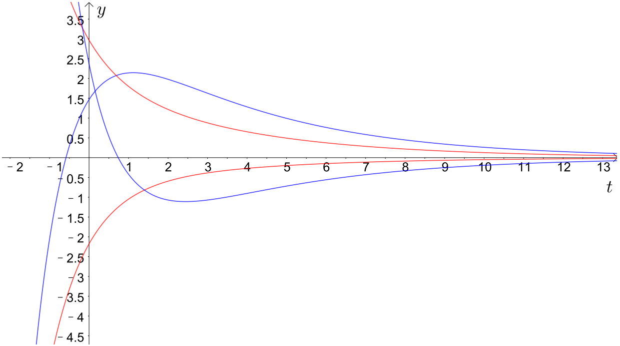


图: $p > 2\sqrt{q}$ 时，过阻尼。有些运动（若 $\lambda_1 < \frac{y'}{y} < \lambda_2$）始终（红色曲线）只在平衡位置（ $y = 0$ ）一侧；其他运动是从平衡位置一侧运动到另外一侧，但之后就始终位于那一侧。所有运动最终趋于静止在平衡位置。

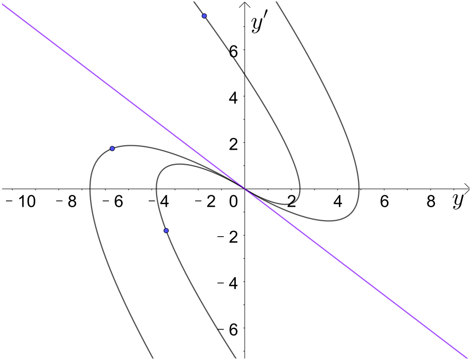


图: $p = 2\sqrt{q}$ 时，临界阻尼。只有一种运动（若 $\frac{y'}{y} = \lambda$）始终（紫色直线）只在平衡位置（ $y = 0$ ）一侧；其他所有运动是从平衡位置一侧运动到另外一侧，但之后就始终位于那一侧。平衡态是渐近稳定的。

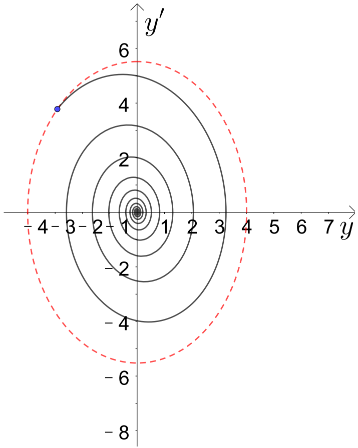


图: $0 < p < 2\sqrt{q}$ 时，欠阻尼。其他所有运动是围绕平衡位置不断摆动。平衡态是渐近稳定的。

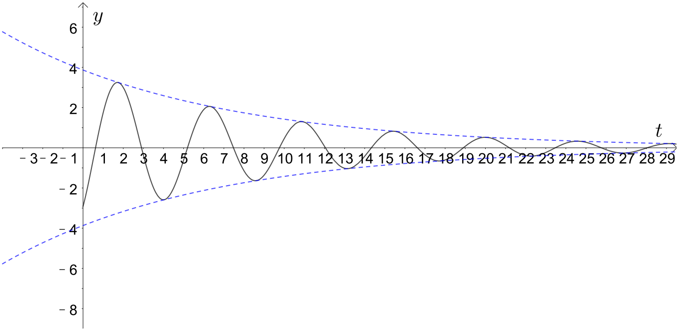


图: $0 < p < 2\sqrt{q}$ 时，欠阻尼。其他所有运动是围绕平衡位置不断摆动。所有运动最终趋于静止在平衡位置。

例 (单摆)

$$\theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

相空间为原柱面 $\{(\theta, \theta') | \theta \in S^1, \theta' \in \mathbb{R}\}$。
机械能

$$E(\theta, \theta') = \frac{\theta'^{\,2}}{2} + \frac{g}{L}(1 - \cos\theta)$$

是守恒的。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\theta, \theta') = \theta'\theta'' + \theta'\frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

由能量守恒得到

$$\theta' = \sqrt{2E_0 - \frac{2g}{L}(1-\cos\theta)} = \sqrt{2E_0 - \frac{2g}{L} + \frac{2g}{L}\cos\theta}.$$

当 $E_0 > \frac{2g}{L}$ 时，$\theta' > \sqrt{2E_0 - \frac{4g}{L}} > 0$，此时单摆绕轴沿一个方向做无休止的旋转。
当 $E_0 = \frac{2g}{L}$ 时，$\theta' = \sqrt{\frac{2g}{L}(1+\cos\theta)} \geq 0$，

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{2g}{L}(1+\cos\theta)}} \overset{\varphi=\pi-\theta}{=} \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\frac{2g}{L}(1-\cos\varphi)}$$

最后这个瑕积分发散，所以 $T = +\infty$。

当 $0 < E_0 < \frac{2g}{L}$ 时，$\theta' = \sqrt{2E_0 - \frac{2g}{L} + \frac{2g}{L}\cos\theta}$，所以

$$\theta \le \arccos\left(1 - \frac{LE_0}{g}\right) = \theta_0.$$

$$T/4 = \int_0^{T/4} \mathrm{d}t = \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2E_0 - \frac{2g}{L} + \frac{2g}{L}\cos\theta}} < +\infty.$$

因为

$$E(\theta, 0) = \frac{g}{L}(1 - \cos\theta)$$

关于 $\theta \in (0, \pi)$ 严格增，$E(0,0) = 0 < E_0 < E(\pi, 0) = \frac{2g}{L}$，所以从 $(0, \sqrt{2E_0})$ 出发的相轨道在有限时刻到达 $(\theta_0, 0)$，由对称性知，再经过相同时间后，它到达 $(0, -\sqrt{2E_0})$，并且最终在有限时刻回到 $(0, \sqrt{2E_0})$。因此它是周期运动，周期为

$$T(E_0) = 4\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{2g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} < +\infty.$$

令 $\theta = t\theta_0$，则

$$\begin{aligned}
T(\theta_0) &= 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\frac{2g}{L\theta_0^2}(\cos(t\theta_0) - \cos\theta_0)}} \\
&= 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\frac{2g}{L\theta_0^2}\frac{\theta_0^2(1-t^2)}{2} + o(1)}} \\
&\approx \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad \theta_0 \to 0.
\end{aligned}$$

在 $(0,0)$ 处，单摆方程的线性化为

$$u'' + \frac{g}{L}u = 0.$$

上述周期的近似值恰好是这个线性化方程解的周期。

在 $(\pi,0)$ 处，单摆方程的线性化为

$$u'' - \frac{g}{L}u = 0.$$

它的平衡态是鞍点。

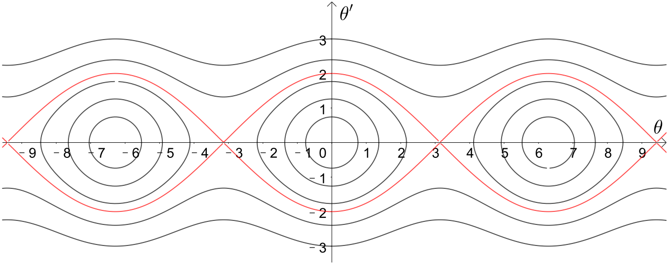


图: 单摆的运动。

如果单摆有微小阻尼

$$\theta'' + \varepsilon\theta' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0,$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是很小的阻尼系数，你能想象它的运动是怎样的吗？