微积分第23讲：高阶线性方程与一阶线性方程组

2021 年 12 月 15 日

- n 阶线性方程

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

$f(x)$：非齐次项。

- 一阶线性方程组

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x).$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{f}(x)$：非齐次项。

高阶方程改写为一阶方程组

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

令 $y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x), \ldots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$，则

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

于是，我们可以统一用一阶方程组进行分析。

叠加原理

若 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 分别是微分方程

$$\mathbf{u}' = A(x)\mathbf{u} + \mathbf{f}(x), \quad \mathbf{v}' = A(x)\mathbf{v} + \mathbf{g}(x)$$

的解，则 $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ 是

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + [\alpha\mathbf{f}(x) + \beta\mathbf{g}(x)]$$

的解。

线性方程组的解空间结构

由叠加原理知：

- 齐次线性方程组
$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$
的全部解构成一个线性空间。有限维？基底？
- 非齐次线性方程组
$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$$
的全部解构成一个仿射空间，任何两个解的差是相应齐次方程的解，即
$$\text{非齐次方程组的通解} = \text{齐次方程组的通解} + \text{非齐次方程组的一个特解}.$$
- 非齐次项拆解为简单形式，求解，再重新组合相应的特解。

常数变易法：齐次方程解空间基底、非齐次方程特解

如果 $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ 是 n 维空间中线性齐次方程 $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ 的一组线性无关解，即

$$C^1\mathbf{y}_1(x) + \cdots + C^n\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{0}, \forall x \Longrightarrow C^1 = \cdots = C^n = 0,$$

则 $U(x) = (\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x))$ 总是可逆矩阵，称它为上述线性齐次方程的基本解矩阵。这里以及随后的几页（至Liouville定理证明结束时）中，我们约定上标为行指标（相当于坐标），下标为列指标（相当于序号）。

于是 $U' = A(x)U(x)$。

对任意 $\mathbf{y}(x)$，记 $\boxed{\mathbf{C}(x) = U(x)^{-1}\mathbf{y}(x)}$，则

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}' &= U(x)\mathbf{C}'(x) + U'(x)\mathbf{C}(x) \\
&= U(x)\mathbf{C}'(x) + A(x)\boxed{U(x)\mathbf{C}(x)} \\
&= U(x)\mathbf{C}'(x) + A(x)\boxed{\mathbf{y}(x)}
\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{y}$ 是非齐次方程的解当且仅当 $U(x)\mathbf{C}' = \mathbf{f}(x)$。

由此解得

$$\mathbf{C}(x) = \mathbf{C}_0 + \int_{x_0}^{x} U(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\mathrm{d}t.$$

从而

$$\boxed{\mathbf{y}(x) = U(x)\mathbf{C}_0 + U(x)\int_{x_0}^{x} U(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\mathrm{d}t.}$$

结论：常数变易法帮助我们从齐次方程的 n 个线性无关解得到

- 齐次方程的通解：$\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ 是基底，通解是它们的任意常系数线性组合；
- 非齐次方程的特解。

于是解方程关键在于找到齐次方程组的 n 个线性无关解。

Wronsky 行列式，Liouville定理，与解的线性无关性

对 n 维空间中线性齐次方程

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

的 n 个解 $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$，以它们为列向量组成一个矩阵

$$U(x) = (\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)).$$

它是关于矩阵的微分方程 $U' = A(x)U$ 的一个解。矩阵 $U(x)$ 的行列式

$$W(x) = \det U(x) = \det(\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x))$$

称为上述 n 个解 $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ 的 Wronsky 行列式。

定理 (Liouville)

Wronsky 行列式满足以下一阶线性方程：

$$W' = \mathrm{tr}A(x) \cdot W.$$

由 Liouville 方程知 $W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s}$。
因此

$$\forall x, W(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x_0, W(x_0) = 0.$$

翻译成方程组的解的语言，即

$$\forall x, \mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x) \text{ 线性相关} \\ \Longleftrightarrow \quad \exists x_0, \mathbf{y}_1(x_0), \ldots, \mathbf{y}_n(x_0) \text{ 线性相关},$$

等价地，

$$\forall x, \mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x) \text{ 线性无关} \\ \Longleftrightarrow \quad \exists x_0, \mathbf{y}_1(x_0), \ldots, \mathbf{y}_n(x_0) \text{ 线性无关}.$$

因此，解方程组的问题就转化为对一组线性无关的初值，找到相应的解。

Liouville定理的证明，茶歇时刻

记 $U^i(x)$ 为矩阵 $U(x)$ 的第 i 行，$U^i_j(x)$ 为矩阵 $U(x)$ 的第 i 行第 j 列的元素。于是

$$U^i_j(x)' = \sum_{k=1}^n a^i_k(x) U^k_j(x) = \left(\sum_{k=1}^n a^i_k(x) U^k(x) \right)_j .$$

而

$$\begin{aligned} W'(x) = (\det U(x))' &= \sum_{i=1}^n \det(U^1(x), \dots, U^i(x)', \dots, U^n(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n \det\left(U^1(x), \dots, \sum_{k=1}^n a^i_k(x) U^k(x), \dots, U^n(x)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \det\left(U^1(x), \dots, a^i_i(x) U^i(x), \dots, U^n(x)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n a^i_i(x) W(x) = \mathrm{tr} A(x) W(x). \end{aligned}$$

茶歇这么快就结束了！

线性方程组解的存在性与唯一性

定理 (线性齐次方程组解的存在性)

若 $A(x)$ 连续，则对任意 $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$，初值问题

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

有解。从而齐次方程的全部解组成一个 n 维线性空间，即通解为一组 n 个线性无关解的任意线性组合。 □

定理 (线性方程组解的唯一性)

若 $A(x), \mathbf{f}(x)$ 连续，则对任意 $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$，初值问题

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

有且只有一个解。

我们证明：对线性方程组，解的存在性蕴涵解的唯一性。

证明.

记 $\mathbf{e}_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ $(k = 1, \ldots, n)$是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底向量，$\mathbf{y}_k$ 为线性齐次方程 $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ 满足初始条件 $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{e}_k$ 的解。

由 Liouville 定理知矩阵 $U(x) = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ 总是可逆的。由常数变易法知

$$\mathbf{y}(x) = U(x)\mathbf{y}_0 + U(x)\int_{x_0}^{x} U(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\mathrm{d}s$$

是方程 $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$ 满足初始条件 $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ 的解。非齐次方程解的存在性得证。

如果 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{z}$ 是同一个非齐次方程满足相同的初始条件的两个解，则 $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ 满足齐次方程，初值为零。由上述常数变易公式知，$\mathbf{y}(x) - \mathbf{z}(x) = U(x)(\mathbf{y}(x_0) - \mathbf{z}(x_0)) = \mathbf{0}$，所以解的唯一性成立。

$\square$

$$
\begin{aligned}
&\text{齐次方程初值问题解的存在性}\\
\xRightarrow{\text{Liouville定理}}\ &\text{齐次方程线性无关解的存在性，基本解矩阵}\\
\xRightarrow{\text{常数变易法}}\ &\text{齐次/非齐次方程初值问题解的唯一性}
\end{aligned}
$$

解的存在性

前面提到的线性齐次方程组解的存在性需要掌握更多工具才能证明。下面针对一些特殊但重要的情形给出单独的证明。

例 (解耦降维)

如果 $A(x)$ 是上三角矩阵，则 $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ 对任何初始条件都有解。

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ 0 & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

此时最后一个方程 $y_n' = a_{nn}(x)y_n$ 是一个一维线性齐次方程，即一个可分离变量方程，对任意初值都有解。
如果 $y_{k+1}, \ldots, y_n$ 都已知，则第 k 个方程

$$y_k' - a_{kk}(x)y_k = a_{k,k+1}y_{k+1} + \cdots + a_{kn}y_n$$

是一个一维线性非齐次方程，对任意初值都有解。
这样 $\mathbf{y}$ 对任意初值都有解。

例

二维线性齐次方程

$$\begin{cases} u' = \alpha u + \beta v, \\ v' = -\beta u + \alpha v. \end{cases}$$

有两个线性无关解，从而对任意初值有解。

证明.

常数变易：令 $u(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} w(x), v(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} z(x)$，则上述方程组变成 $\begin{cases} w' = \beta z, \\ z' = -\beta w. \end{cases}$ 该方程组等价于二阶线性方程 $w'' + \beta^2 w = 0$，$w = \cos\beta x$ 和 $w = \sin\beta x$ 是这个二阶方程的两个解，对应求得 $z = -\sin\beta x$ 和 $z = \cos\beta x$。于是

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \\ -\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \\ \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \end{pmatrix}$$

是原方程组的线性无关解。构造解比检验解要复杂，却更重要。

一般地，如果系数矩阵 $A(x)$ 是上三角块矩阵，

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_1(x) & B_1(x) \\ 0 & A_2(x) \end{pmatrix}$$

且

$$\mathbf{u}' = A_1(x)\mathbf{u}, \quad \mathbf{v}' = A_2(x)\mathbf{v}$$

都对任意初值有解，则 $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ 对任意初值有解。

记 $U(x), V(x)$ 分别是上述两个齐次方程的基本解矩阵。则 $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ 满足初始条件 $\mathbf{y}(x_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix}$ 的解为

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} U(x)U(x_0)^{-1}\mathbf{u}_0 + U(x)\int_{x_0}^{x} U(t)^{-1}B_1(t)V(t)V(x_0)^{-1}\mathbf{v}_0 \mathrm{d}t \\ V(x)V(x_0)^{-1}\mathbf{v}_0 \end{pmatrix}.$$

常系数线性方程组，矩阵特征值-特征向量

定理 (来自线性代数)

任何 n 阶实数方阵 A 总可在适当基底下写成对角块矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix}$$

其中

- 要么 A_i 是一阶方阵，即一个实数；或者 A_i 是以某个实数 λ 为对角元的上三角矩阵；
- 要么 A_i 为形如 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ 的二阶矩阵，或者 A_i 是以这个二阶矩阵为对角块的上三角分块矩阵。

因此所有常系数线性齐次方程组对任意初值有解。

例

解方程

$$\begin{cases} u' = 3u - 4v, \\ v' = -5u + 4v. \end{cases}$$

解.

系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$，特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda - 4) - 20 = (\lambda - 8)(\lambda + 1),$$

特征根 $\lambda = 8$，$\lambda = -1$，分别对应特征向量

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

（转下页） □

接上页.

设

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = a(x)\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} + b(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= a'(x)\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} + b'(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \\ &= 8a(x)\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} + (-1)b(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以 $a(x) = C_1\mathrm{e}^{8x}, b(x) = C_2\mathrm{e}^{-x}$，因此

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1\mathrm{e}^{8x}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

例

解方程 $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$，其中

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

原方程组相当于

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right) y_1 = y_2, \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right) y_2 = y_3, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right) y_n = 0.$$

也即

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right)^n y_1 = 0, \quad y_k = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right)^{k-1} y_1, k = 2, \ldots, n.$$

记 $z_k = \mathrm{e}^{-\lambda x} y_k$，即 $y_k = \mathrm{e}^{\lambda x} z_k$。则

$$\mathrm{e}^{\lambda x} z_{k+1} = y_{k+1} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right) y_k = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right) \left(\mathrm{e}^{\lambda x} z_k\right) = \mathrm{e}^{\lambda x} z_k',$$

且 $\mathrm{e}^{\lambda x} z_n' = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right) \left(\mathrm{e}^{\lambda x} z_n\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right) y_n = 0$。
从而 $z_1^{(n)} = z_n' = 0$，因此得到 z_1 的通解

$$z_1 = C_0 + C_1 x + \cdots + \frac{C_{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

从而

$$z_k = z_1^{(k-1)} = C_{k-1} + C_k x + \cdots + \frac{C_{n-1} x^{n-k}}{(n-k)!}, z_n = z_1^{(n-1)} = C_{n-1}.$$

于是原方程通解为

$$
\mathrm{e}^{\lambda x}\begin{pmatrix}
1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
0 & 1 & x & \ddots & \ddots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \\
0 & 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-2} \\ C_{n-1}
\end{pmatrix}.
$$

当 λ 为复数 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 时，把上述复数形式通解和它的共轭相加，得到实数形式的通解。

高阶线性方程

高阶线性齐次方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

可以该写为一阶方程组

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

原方程的 n 个解 $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ 的 Wronsky 行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}_{n\times n}$$

这 n 个解称为线性无关的，如果它们的 Wronsky 行列式非零。

利用齐次方程的 n 个线性无关解和常数变易法，可以求解高阶线性非齐次方程的解，

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

这相当于用齐次方程组的基本解矩阵和常数变易法求解非齐次的线性方程组：

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

从这个方程组求得系数 $C_1(x), \ldots, C_n(x)$，这时原方程的解为

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x).$$

有些教材对 $C_1', \ldots, C_n'$ 的上述方程组中前 $n-1$ 个方程的来源写得很神秘或者显得很随意，但这些方程是自然的，也是必然的。

常系数高阶线性方程

求解常系数高阶线性齐次方程

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

可以利用特征多项式 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ 把上述方程因式分解为

$$Ly = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_1\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_r\right)^{n_r} y = 0,$$

其中 $n_1 + \cdots + n_r = n$，这些 λ_k 是特征多项式的根。
可由上例求得 n 个解

$$\mathrm{e}^{\lambda_k x}, x\mathrm{e}^{\lambda_k x}, \cdots, \frac{x^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\mathrm{e}^{\lambda_k x}, \quad k = 1, \ldots, r.$$

我们证明 n 个解是线性无关的。从而方程通解是它们的线性组合。虽然我们有 Wronsky 行列式可供使用，但我们还是愿意给出另一个看法。

证明.

把求导算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu$ 作用在上述函数上，

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu\right)\left(\frac{x^m}{m!}\mathrm{e}^{\lambda x}\right) = (\lambda - \mu)\frac{x^m}{m!}\mathrm{e}^{\lambda x} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

所以

- 当 $\mu = \lambda$ 时， $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda$ 使 $\frac{x^m}{m!}\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的多项式部分降次，连续作用 $m + 1$ 次 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda$ 后， $\frac{x^m}{m!}\mathrm{e}^{\lambda x}$ 变成零。
- 当 $\mu \neq \lambda$ 时， $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mu$ 作用后， $\frac{x^m}{m!}\mathrm{e}^{\lambda x}$ 成了一个非零倍数，同时分离出低一次的相同指数项。

对上述函数的任何一个结果为零的线性组合，若存在一个系数非零的项 t，且它在相同指数的排列中多项式次数最高，则可以选择不同的 μ 不断作用，直到这个线性组合其他项都消失，此时因为线性组合为零，所以 t 的系数为零。这与开始的假设矛盾。所以上述这 n 个函数是线性无关的。 □

例

解方程

$$y'' + y = \sin \omega x.$$

解.

它对应一阶线性方程组

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \omega x \end{pmatrix}.$$

其中，齐次部分

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

有一对线性无关解

$$\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

是齐次方程的基本解矩阵。
用常数变易法求非齐次方程的解

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix}$$

得到

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \omega x \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \omega x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(1+\omega)x-\cos(1-\omega)x}{2} \\ \frac{\sin(\omega+1)x+\sin(\omega-1)x}{2} \end{pmatrix}$$

解得

$$C_1(x)=\begin{cases}\frac{\sin(\omega+1)x}{2(1+\omega)}-\frac{\sin(1-\omega)x}{2(1-\omega)}+C_1, & \omega\neq 1,\\ \frac{\sin(\omega+1)x}{2(1+\omega)}-\frac{x}{2}+C_1, & \omega=1.\end{cases}$$

$$C_2(x)=\begin{cases}\frac{-\cos(\omega+1)x}{2(1+\omega)}-\frac{\cos(\omega-1)x}{2(\omega-1)}+C_2, & \omega\neq 1,\\ \frac{-\cos(\omega+1)x}{2(1+\omega)}+C_2, & \omega=1.\end{cases}$$

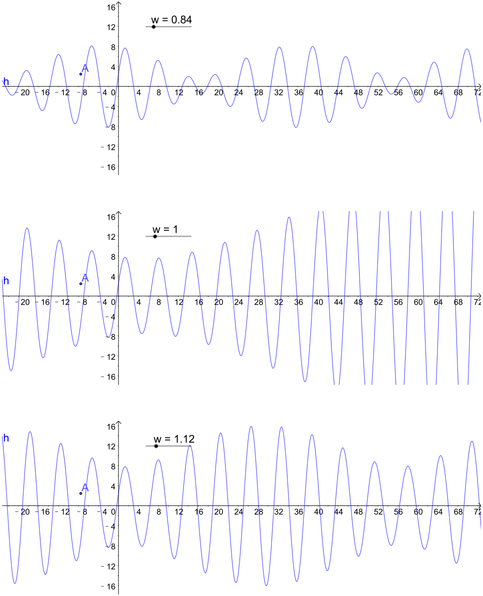
所以，当 $\omega\neq 1$ 时，

$$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x=\frac{\sin\omega x}{1-\omega^2}+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

所有解都是有界的。当 $\omega=1$ 时，

$$y=-\frac{x\cos x}{2}+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

解是无界函数（共振）。 □


w = 0.84
w = 1
w = 1.12
h
A

关于非齐次方程特解的求法。

上述方程右端非齐次项 $\sin\omega x$ 属于指数型函数，事实上 $\sin\omega x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}}{2\mathrm{i}}$。

- 如果 $\omega \neq 1$，则 $\sin\omega x$ 不是齐次方程的解。此时设

$$y(x) = P(x)\sin\omega x + Q(x)\cos\omega(x),$$

代入方程得到

$$\begin{aligned}&(P'' - 2\omega Q' - \omega^2 P + P)\sin\omega x \\ &\qquad + (Q'' + 2\omega P' - \omega^2 Q + Q)\cos\omega x = \sin\omega x.\end{aligned}$$

所以可取 $Q = 0$，$P = \frac{1}{1-\omega^2}$，从而得到特解 $\frac{\sin\omega x}{1-\omega^2}$。

- 当 $\omega = 1$ 时，由

$$\lim_{\omega\to 1}\frac{\sin\omega x - \sin x}{1-\omega^2} = \frac{1}{-2}\left.\frac{\mathrm{d}\sin\omega x}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=1} = -\frac{x\cos x}{2}$$

得到 $\omega = 1$ 时的特解。（请找出其中的问题）

例

求 $Ly = y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}x^2$ 的一个特解。

解.

$L(\mathrm{e}^{3x}) = 2\mathrm{e}^{3x}$， $L(\mathrm{e}^{3x}x) = \mathrm{e}^{3x}(3+2x)$，
$L(\mathrm{e}^{3x}x^2) = \mathrm{e}^{3x}(2+6x+2x^2)$，所以

$$L(\mathrm{e}^{3x}, \mathrm{e}^{3x}x, \mathrm{e}^{3x}x^2) = (\mathrm{e}^{3x}, \mathrm{e}^{3x}x, \mathrm{e}^{3x}x^2)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

上述矩阵的逆矩阵为 $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，所以

$B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$。即原方程有如下特解

$y = \mathrm{e}^{3x}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}\right)$。 $\square$

例

求 $Ly = y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x x^2$ 的一个特解。

解.

$L(\mathrm{e}^x) = 0$，$L(\mathrm{e}^x x) = -\mathrm{e}^x$，$L(\mathrm{e}^x x^2) = \mathrm{e}^x(2 - 2x)$，
$L(\mathrm{e}^x x^3) = \mathrm{e}^x(6x - 3x^2)$，此时右端出现原方程的非齐次项 $\mathrm{e}^x x^2$。
所以

$$L(\mathrm{e}^x x, \mathrm{e}^x x^2, \mathrm{e}^x x^3) = (\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^x x, \mathrm{e}^x x^2)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

上述矩阵的逆矩阵为 $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$，所以

$B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$。即原方程有如下特解

$y = \mathrm{e}^x\left(\frac{-x^3}{3} - x^2 - 2x\right)$。 □

一般地，对常系数线性微分方程，

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

如果右端非齐次项是拟多项式（即形如 $\mathrm{e}^{\mu x}Q(x)$，其中 $Q(x)$ 是多项式），则该方程一定有拟多项式特解。

记 $V_m(\lambda)$ 是所有形如 $\mathrm{e}^{\lambda x}Q(x)$ 拟多项式组成的线性空间，其中 $Q(x)$ 是关于 x 的次数不超过 m 的多项式。由于

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)(x^j\mathrm{e}^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^{j} C_j^i P^{(j-i)}(\lambda)x^i\mathrm{e}^{\lambda x},$$

所以 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ 是从 $V_m(\lambda)$ 到其自身的线性映射。

对升幂排列的基底 $\mathrm{e}^{\lambda x}, x\mathrm{e}^{\lambda x}, x^2\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots, x^m\mathrm{e}^{\lambda x}$，线性映射 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right): V_m(\lambda) \to V_m(\lambda)$ 对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} P(\lambda) & P'(\lambda) & P''(\lambda) & P^{(3)}(\lambda) & \cdots & P^{(m)}(\lambda) \\ 0 & P(\lambda) & 2P'(\lambda) & 3P''(\lambda) & \cdots & C_m^1 P^{(m-1)}(\lambda) \\ 0 & 0 & P(\lambda) & 3P'(\lambda) & \cdots & C_m^2 P^{(m-2)}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & P(\lambda) & \cdots & C_m^3 P^{(m-3)}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

如果 λ 是多项式 $t^n + a_{k-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ 的 k 重根（当 λ 不是根时，$k = 0$），则对任意非负整数 m，$L: V_{m+k} \to V_m$ 是满射。

欧拉方程

形如

$$x^n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0 y = f(x)$$

的线性微分方程称为欧拉方程。

记 $t=\ln x$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

于是

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

用数学归纳法可以证明

$$x^n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-n+1\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

于是 Euler 方程经过自变量换元可以变成关于 t 的常系数线性微分方程。

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n}+b_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+b_0y=f(\mathrm{e}^t).$$

例

解方程

$$x^2y'' - 2y = x^4.$$

解：欧拉方程，换元.

令 $t = \ln|x|$。则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

所以原方程变成 $Ly = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2y = e^{4t}$。由 $L(e^{4t}) = 10e^{4t}$ 知上述方程有特解 $\frac{e^{4t}}{10}$。另外，特征多项式 $\lambda^2 - \lambda - 2$ 有特征根 $\lambda = -1, 2$，所以原方程通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{2t} + \frac{e^{4t}}{10} = \frac{C_1}{x} + C_2x^2 + \frac{x^4}{10}.$$

$\square$

解法2：因式分解，降阶.

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha\right)\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\beta\right)y=x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-2y=x^4,$$

所以

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1-\alpha-\beta)+\alpha\beta y=x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-2y=x^4,$$

因此 $\alpha+\beta=1,\alpha\beta=-2$，解得 $\alpha=2,\beta=-1$。原方程等价于方程组

$$\begin{cases} xy'+y=z, \\ xz'-2z=x^4. \end{cases}$$

由后一个方程解得 $z=C_1x^2+\frac{x^4}{2}$。再由前一个方程解得 $y=\frac{C_2}{x}+\frac{C_1x^2}{3}+\frac{x^4}{10}$。 $\square$

解法3：方程组，常数变易.

方程组等价于

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{x^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

用解法1或解法2得到齐次方程的一对解 $y_1(x) = \frac{1}{x}, y_2(x) = x^2$。
用常数变易法，设 $y(x) = C_1(x)\frac{1}{x} + C_2(x)x^2$ 是解，则

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & x^2 \\ -\frac{1}{x^2} & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x & -x^2 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x^4}{3} \\ \frac{x}{3} \end{pmatrix}$$

从而 $C_1(x) = -\frac{x^5}{15} + A$，$C_2(x) = \frac{x^2}{6} + B$，所以
$y(x) = \frac{A}{x} + Bx^2 - \frac{x^4}{15} + \frac{x^4}{6} = \frac{A}{x} + Bx^2 + \frac{x^4}{10}$。 □

解法4.

设 x^α 是齐次方程 $x^2y''-2y=0$ 的解。则

$$x^\alpha[\alpha(\alpha-1)-2]=0,$$

由 $\alpha(\alpha-1)-2=0$ 解得 $\alpha=-1$ 或 $\alpha=2$，于是 $\frac{1}{x}$ 和 x^2 是齐次方程的两个线性无关解。

再由

$$L(x^4)=12x^4-2x^4=10x^4$$

知 $\frac{x^4}{10}$ 是非齐次方程 $x^2y''-2y=x^4$ 的特解。

所以该非齐次方程的通解为

$$y=\frac{C_1}{x}+C_2x^2+\frac{x^4}{10}.$$

$\square$

对一般的齐次 Euler 方程

$$Ly = x^n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0 y = 0,$$

易见

$$\begin{aligned} L(x^\alpha) = x^\alpha[&\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) + a_{n-1}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2) \\ &+ \cdots + a_1\alpha + a_0] = x^\alpha P(\alpha), \end{aligned}$$

所以 x^α 是齐次方程的解当且仅当 $P(\alpha) = 0$。

对 $\beta \neq \alpha$，

$$L\left(\frac{x^\beta - x^\alpha}{\beta - \alpha}\right) = \frac{x^\beta P(\beta) - x^\alpha(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

让 $\beta \to \alpha$，则得到

$$L(x^\alpha \ln x) = x^\alpha \ln x P(\alpha) + x^\alpha P'(\alpha).$$

所以当 α 是多项式 P 的重根时，$x^\alpha \ln x$ 也是齐次方程的解。
一般地，如果 α 是多项式 P 的 k 重根时，则

$$x^\alpha, x^\alpha \ln x, \ldots, x^\alpha (\ln x)^{k-1}$$

都是齐次方程的解。这样可以得到齐次方程的 n 个线性无关解。
齐次方程通解是它们的线性组合。
类似地，可以求非齐次项为 $x^\alpha Q(\ln x)$ （Q 是多项式）的非齐次方程的特解。