微积分第22讲：可降阶的高阶方程

2021 年 12 月 8 日

可降阶方程

(1) 不显含 y 的方程

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

记 $p = y^{(k)}$，则上述方程等价于以下 m 阶微分方程组

$$\begin{cases} F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0, \\ y^{(k)} = p, \end{cases}$$

其中 $m = \max\{k, n-k\}$。

例

高阶线性方程

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad (*)$$

可以通过常数变易法降阶。

证明.

如果 $y_0(x)$ 是齐次方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

的一个恒不为零的解，则把 $y(x) = C(x)y_0(x)$ 代入(*)，得到

$$\left(C^{(n)} + b_{n-1}(x)C^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)C'\right)y_0(x) + C(x)Ly_0 = f(x),$$

于是得到如下关于 C' 的 $n-1$ 阶线性方程

$$C^{(n)} + b_{n-1}(x)C^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)C' = y_0(x)^{-1}f(x).$$

例 (常曲率平面曲线)

对曲线 $y=f(x)$，曲率 $\kappa=\frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}$。证明：如果 $\kappa=0$，则 $y=f(x)$ 是直线；如果 $\kappa>0$ 是常数，则 $y=f(x)$ 是圆弧。

证明.

$\kappa=0$ 时，$y''=0$，从而 $y=a+bx$ 是直线。

下设 $\kappa>0$ 是常数。不妨设 $\kappa=\frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}$。这是不显含 y 的方程，可以降阶。记 $p=y'$，则

$$p'=\kappa(1+p^2)^{\frac{3}{2}}.$$

这是可分离变量的一阶微分方程，解得

$$x=\int \mathrm{d}x=\int \frac{1}{\kappa}(1+p^2)^{\frac{-3}{2}}\mathrm{d}p=\frac{1}{\kappa}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}+C_1.$$

（转下页） □

接上页.

$$1-\kappa^2(x-C_1)^2 = 1-\frac{p^2}{1+p^2} = \frac{1}{1+p^2}$$

从而

$$y' = p = \pm\sqrt{\frac{1}{1-\kappa^2(x-C_1)^2}-1} = \pm\sqrt{\frac{\kappa^2(x-C_1)^2}{1-\kappa^2(x-C_1)^2}}.$$

记 $\theta = \arccos\kappa(x-C_1)$，则 $x = C_1+\frac{1}{\kappa}\cos\theta$，

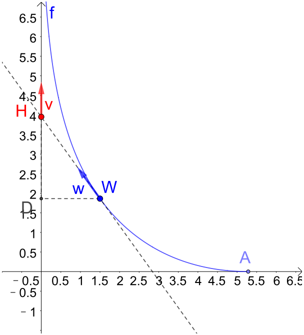
$$y = \mp\int\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}\frac{1}{\kappa}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \pm\frac{1}{\kappa}\sin\theta + C_2.$$

因此 $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2 = \frac{1}{\kappa^2}$ 是圆弧。 $\square$

例 (追踪问题)

xy 直角坐标平面中位于点 $(a, 0)$ 处的一只狼看见一只兔子沿 y 轴正向以速度 v 匀速前进恰好经过原点。狼开始追逐兔子，狼始终朝向兔子，并保持以速度 1 匀速前进。问狼是否能追上兔子以及狼追多久能追到兔子？

解.



设时刻 t 时狼位于点 $(x(t), y(t))$。于是

$$\frac{vt - y}{x} = \tan(\pi - \theta(t)) = -\tan\theta(t) = -y'_x,$$

因此 $vt - y = -xy'_x$。 （转下页）

接上页.
两边对 x 求导，得到

$$vt'_x - y'_x = -y'_x - xy''_{xx};$$

另一方面，狼的速度

$$1 = \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2} = -x'_t\sqrt{1 + {y'_x}^2},$$

而 $t'_x = 1/x'_t$，所以

$$\boxed{v\sqrt{1 + {y'_x}^2} = xy''_{xx}.}$$

这是不显含 y 的可降阶方程。 □

令 $z=y'_x$，则
$$v\sqrt{1+z^2}=xz'_x.$$
这是一个分离变量方程，解得
$$z=\frac{Ax^v}{2}-\frac{1}{2Ax^v}.$$
因此
$$y=\begin{cases}\dfrac{Ax^{v+1}}{2(1+v)}-\dfrac{x^{1-v}}{2A(1-v)}+B, & v\neq 1;\\ \dfrac{Ax^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2A}+B, & v=1.\end{cases}$$
若 $v\geq 1$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}y(x)=+\infty$，所以 $y=y(x)$ 与 y 轴无交点，于是狼追不上兔子。

若 $v<1$，则由初始条件 $y(a)=0$，$y'(a)=0$ 可得 $A=a^{-v}, B=\frac{av}{1-v^2}$，所以

$$y=\frac{x^{v+1}}{2a^v(1+v)}-\frac{a^v x^{1-v}}{2(1-v)}+\frac{av}{1-v^2}.$$

因此 $y(0)=\dfrac{av}{1-v^2}$。此时狼跑的路程

$$L=\int_0^a \sqrt{1+{y'_x}^2}\mathrm{d}x=\int_0^a \frac{x}{v}y''_{xx}\mathrm{d}x=\frac{x}{v}y'_x\Big|_0^a-\int_0^a \frac{1}{v}y'_x\mathrm{d}x=\frac{a}{1-v^2},$$

这也正是狼跑的时间，此时兔子恰好也位于 $\frac{av}{1-v^2}$ 处。所以狼追到了兔子。

(2) 不显含 x 的方程

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

此时记 $p = y'$，并视 y 为自变量。则对任何函数 $u = u(y)$，函数 $u = u(y(x))$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y},$$

即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$。
于是

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}y}{\mathrm{d}x^{k+1}} = \frac{\mathrm{d}^k p}{\mathrm{d}x^k} = \left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^k p.$$

因此原方程等价于如下 $n-1$ 阶微分方程组:

$$\begin{cases} F\left(y, p, \ldots, \left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^{n-1} p\right) = 0, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p. \end{cases}$$

变分法

例

欧氏空间中连接两点的最短曲线是直线段。

解.

曲线 $\mathbf{x}(t)$ 的弧长 $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\langle\mathbf{x}'(t),\mathbf{x}'(t)\rangle}\mathrm{d}t$，其中 $\langle,\rangle$ 为内积。不妨设 t 是曲线 $\mathbf{x}(t)$ 的弧长参数，则$\langle\mathbf{x}'(t),\mathbf{x}'(t)\rangle=1$，且对满足 $\mathbf{u}(\alpha)=\mathbf{u}(\beta)=\mathbf{0}$ 的任意 $\mathbf{u}(t)$，

$$\begin{aligned}
L(\varepsilon)&=\int_\alpha^\beta\sqrt{\langle(\mathbf{x}(t)+\varepsilon\mathbf{u}(t))',(\mathbf{x}(t)+\varepsilon\mathbf{u}(t))'\rangle}\mathrm{d}t\\
&=\int_\alpha^\beta\sqrt{\langle\mathbf{x}'(t),\mathbf{x}'(t)\rangle+2\varepsilon\langle\mathbf{x}'(t),\mathbf{u}'(t)\rangle+o(\varepsilon)}\mathrm{d}t\\
&=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+2\varepsilon\langle\mathbf{x}'(t),\mathbf{u}'(t)\rangle+o(\varepsilon)}\mathrm{d}t\\
&=\int_\alpha^\beta 1+\varepsilon\langle\mathbf{x}'(t),\mathbf{u}'(t)\rangle+o(\varepsilon)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

接上页.

$L(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 处取最小值，则 $L'(\varepsilon) = 0$，因此

$$\int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle \mathrm{d}t = 0.$$

由分部积分知

$$0 = \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t) \rangle \big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{x}''(t), \mathbf{u}(t) \rangle \mathrm{d}t = -\int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{x}''(t), \mathbf{u}(t) \rangle \mathrm{d}t.$$

对任意 $\delta > 0$，存在 $\mathscr{C}^{\infty}$ 非负函数 $\lambda(t)$ 使得 $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = 0$，且 $\lambda(t) = 1 (\forall t \in (\alpha + \delta, \beta - \delta))$。令 $\mathbf{u}(t) = \lambda(t)\mathbf{x}''(t)$，则

$$0 = \int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{x}''(t), \lambda(t)\mathbf{x}''(t) \rangle \mathrm{d}t \geq \int_{\alpha+\delta}^{\beta-\delta} \|\mathbf{x}''(t)\|^2 \mathrm{d}t.$$

因此对任意 $t \in (\alpha, \beta)$，$\mathbf{x}''(t) = \mathbf{0}$。因此曲线为直线。 $\square$

例

一条质量均匀分布的绳索两端固定，它在重力作用下自然下垂，所形成的曲线叫做悬链线（catenary）。求悬链线方程 $y = y(x)$。


悬链线问题由来已久，伽利略和胡克都曾研究过。1691，Jacob Bernoulli 把求悬链线方程作为一个挑战问题，Leibniz,Huygens 和 Jacob 的弟弟 Johann 解决了这个问题。

解.

最小作用量原理：悬链线使以下重力势能达到最小。

$$E(y) = \int_0^L g(y - C)\rho \mathrm{d}l = \int_a^b \rho g(y(x) - C)\sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x.$$

其中 C 是势能为零时的高度（注意：势能是相对的），取适当的量纲单位，不妨设 $\rho g = 1$。此时，势能函数为

$$E(y) = \int_a^b (y(x) - C)\sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x.$$

函数 $E(y)$ 的自变量 y 本身是一个函数，所以我们称 $E(y)$ 为一个泛函。

对满足 $h(a) = h(b) = 0$（使绳索两端固定） 的任何可微函数 h，

$$f(\varepsilon) = E(y+\varepsilon h) = \int_a^b (y(x)-C+\varepsilon h(x))\sqrt{1 + (y'(x) + \varepsilon h'(x))^2}\mathrm{d}x,$$

悬链线对应 f 取最小值时 $\varepsilon = 0$。（转下页）

（接上页）在 $\varepsilon \to 0$ 时，渐近展开

$$
\begin{aligned}
f(\varepsilon) &= \int_a^b (y(x) - C + \varepsilon h(x))\sqrt{1+y'(x)^2}\sqrt{1+\frac{2\varepsilon y'(x)h'(x)}{1+y'(x)^2}+o(\varepsilon)}\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b (y(x) - C + \varepsilon h(x))\sqrt{1+y'(x)^2}\left(1+\frac{\varepsilon y'(x)h'(x)}{1+y'(x)^2}+o(\varepsilon)\right)\mathrm{d}x \\
&= f(0) + \varepsilon\int_a^b h(x)\sqrt{1+y'(x)^2} + \frac{(y(x)-C)y'(x)h'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\mathrm{d}x + o(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

所以 $f'(0) = \int_a^b h(x)\sqrt{1+y'(x)^2} + \frac{(y(x)-C)y'(x)h'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\mathrm{d}x$。
若 $f(0)$ 是最小值，则 $f'(0)=0$。即

$$
\int_a^b h(x)\sqrt{1+y'(x)^2} + \frac{(y(x)-C)y'(x)h'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\mathrm{d}x = 0
$$

（转下页）

（接上页）

$$\int_a^b \frac{(y(x)-C)y'(x)h'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \frac{(y(x)-C)y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\mathrm{d}h(x)$$

$$=\frac{(y(x)-C)y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}h(x)\Bigg|_a^b-\int_a^b h(x)\mathrm{d}\frac{(y(x)-C)y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}$$

$$=-\int_a^b h(x)\left(\frac{(y(x)-C)y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\right)'\mathrm{d}x$$

因此

$$f'(0)=\int_a^b\left[\sqrt{1+y'(x)^2}-\left(\frac{(y(x)-C)y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\right)'\right]h(x)\mathrm{d}x=0.$$

（转下页）

（接上页）

引理

如果连续函数 g 满足对任意可微函数$h(h(a)=h(b)=0)$，$\int_a^b g(x)h(x)\mathrm{d}x=0$，则对所有 $x\in[a,b]$，$g(x)=0$。

因此悬链线满足如下微分方程

$$\sqrt{1+y'(x)^2}=\left(\frac{(y(x)-C)y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\right)'.$$

化简得到 $(y+C)y''=1+(y')^2$。这是不显含 x 的二阶微分方程。按标准的降阶程序，记 $p=y'$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，从而

$$p(y+C)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2.$$

这是一个可分离变量的一阶方程，解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=A\sqrt{(y+C)^2-\frac{1}{A^2}}.$$

（转下页）

（接上页）设 $A(y+C)=\frac{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}}{2}$（$t>0$），则

$$A\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}{2}\mathrm{d}t, \qquad \sqrt{A^2(y+C)^2-1}=\frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}{2},$$

从而 $\mathrm{d}t=A\mathrm{d}x$。解得 $t=Ax+B$，

$$y=\frac{\mathrm{e}^{Ax+B}+\mathrm{e}^{-Ax-B}}{2A}-C=\frac{\cosh(Ax+B)}{A}-C,$$

其中 A,B,C 由绳索两端位置以及绳索长度确定（请读者自己写出它们之间的关系）。 $\square$

图: Jacob Bernoulli，1655-1705，著名的Bernoulli兄弟中的哥哥，提出了概率中的大数定律，发明了变分法。

利用因子分解进行降阶

例

解方程

$$y'' - 3y' + 2y = x^2$$

解.

把方程写成求导算子的形式

$$Ly = \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 2\right] y = x^2.$$

对 L 进行因式分解

$$L = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right).$$

则原方程等价于一阶方程组 $\begin{cases} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right) y = z, \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2\right) z = x^2. \end{cases}$ （转下页）

接上页.

由齐次方程 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1\right)y=0$ 解得 $y=C_1\mathrm{e}^x$。

由齐次方程$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-2\right)z=0$ 解得 $z=C_2\mathrm{e}^{2x}$。

对非齐次方程$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-2\right)z=x^2$，可以用常数变易法求其通解，也可以（从最高次项开始）凑得它的一个多项式形式的特解

$$z=-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}.$$

因此非齐次方程$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-2\right)z=x^3$ 的通解为

$$z=C_2\mathrm{e}^{2x}-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}.$$

（转下页） □

接上页.

对 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1\right)y = C_2\mathrm{e}^{2x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$，可得其特解

$$y = C_2\mathrm{e}^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}.$$

所以原方程通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}\right).$$

□

例

解方程

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$$

解.

用待定系数的办法把方程写成如下形式

$$Ly = \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha\right)\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \beta\right)y = 0.$$

于是

$$Ly = x^2y'' + (1-\alpha-\beta)xy' + \alpha\beta y$$

对比原方程可求得系数 $\alpha = 1, \beta = 3$。

于是原方程等价于一阶方程组 $\begin{cases} \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 3\right)y = z, \\ \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right)z = 0. \end{cases}$ （转下页）

□

接上页.

由方程 $xz' - z = 0$ 解得 $z = C_1 x$。

由齐次方程 $xy' - 3y = 0$ 解得 $y = C_2 x^3$。

对非齐次方程 $xy' - 3y = C_1 x$，我们用常数变易法求其通解。设 $y(x) = C(x)x^3$，代入上述非齐次方程，得到

$$C' = \frac{C_1}{x^3}.$$

因此

$$C(x) = -\frac{C_1}{2x^2} + C_2.$$

所以

$$y = C_2 x^3 + \tilde{C}_1 x.$$

□

二阶线性微分方程降阶为一阶Ricatti方程

例

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

令 $u = \frac{y'}{y}$。则

$$u' = \frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{y[-p(x)y' - q(x)y]}{y^2} - u^2 = u^2 - p(x)u - q(x).$$