微积分第21讲：常微分方程的基本概念与一阶微分方程的求解

2021 年 12 月 6 日

微分方程是未知函数和它的导数满足的等式。
微分方程是描述事物变化的重要工具。
Newton第二定律：力决定加速度（瞬间），进而决定运动（长久）。
对 Newton 而言，微分方程可以帮助我们了解自然的规律。

Differential equations were invented by Newton(1642-1727). Newton considered this invention of his so important that he encoded it as an anagram whose meaning in mordern terms can be freely translated as follows: "The laws of nature are expressed by differential equations."
—— Vladimir Igorevich Arnold (12 June 1937 – 3 June 2010), Preface to the third edition of Ordinary differential equations, 1984

概念

含有未知函数及其导数的等式（组）称为微分方程（组），其中涉及的未知函数导数的最高阶数称为微分方程的阶。

如果一个微分方程（组）中所有未知函数都是同一个自变量的一元函数，则称这个微分方程（组）为常微分方程（组）。

一般的 n 阶常微分方程形如

$$F(x,\mathbf{y},\mathbf{y}',\dots,\mathbf{y}^{(n)})=0,$$

其中 $\mathbf{y}(x)=(y_1(x),\dots,y_m(x))$ 是（一组）未知函数。

形如

$$\mathbf{y}^{(n)}=f(x,\mathbf{y},\mathbf{y}',\dots,\mathbf{y}^{(n-1)})$$

的微分方程称为显式的微分方程，否则称为隐式的微分方程。

概念

称 $\mathbf{y}=\mathbf{y}(x)$ 是微分方程 $F(x,\mathbf{y},\mathbf{y}',\ldots,\mathbf{y}^{(n)})=0$ 的解，如果

$$F(x,\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x),\ldots,\mathbf{y}^{(n)}(x))=0,\quad \forall x.$$

称 $\mathbf{y}=\mathbf{y}(x)$ 是微分方程初值问题

$$\begin{cases} F(x,\mathbf{y},\mathbf{y}',\ldots,\mathbf{y}^{(n)})=0, \\ \mathbf{y}(x_0)=\mathbf{C}_0, \\ \mathbf{y}'(x_0)=\mathbf{C}_1, \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)}(x_0)=\mathbf{C}_{n-1} \end{cases}$$

的解，如果它满足上述等式。

称 $y=y(x)$ 是 n 阶微分方程 $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0$ 的通解，
如果它含有 n 个任意常数。

一阶微分方程

最简单的方程是

$$y' = f(x).$$

如果 f 是连续函数，则上述微分方程的通解为 f 的不定积分。

对任何 y_0 和 x_0，初值问题

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

的解为 $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$。

一阶微分方程的几何

场是现代数学和物理学中的重要概念。

一阶微分方程

$$y' = f(x, y)$$

在 (x, y) 坐标平面内定义了一个斜率场 f（二维情形），也叫方向场 f（任意维数），它在空间每个点处给定一个斜率或一个方向。

称 (x, y) 坐标平面内的曲线 γ 是方向场 f 的一条积分曲线，如果 γ 在其每个点处与方向为 $f(x, y)$ 的直线相切。

易见，$y = y(x)$ 是上述微分方程的解当且仅当 $(x, y(x))$ 是方向场 f 的积分曲线。

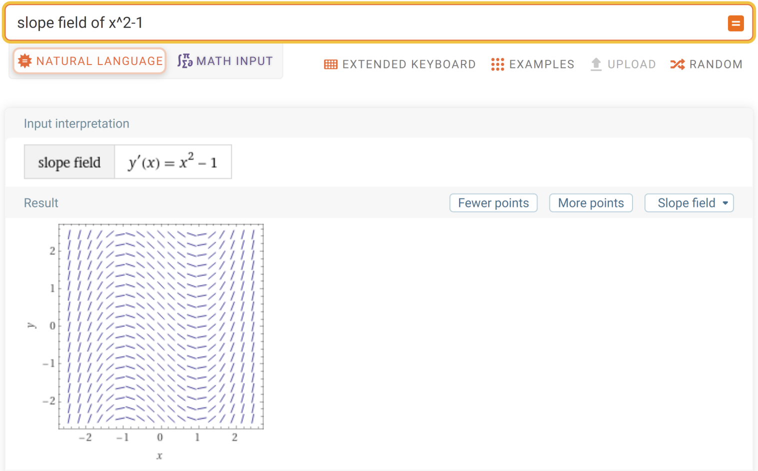

图: 在wolframalpha上画斜率场 $x^2 - 1$

方向场的对称性 $\longrightarrow$ 求解的方式

例

对微分方程 $y' = f(x)$:

- 方向场 $f(x)$ 只与 x 有关
- 方向场 $f(x)$ 沿 y 轴平移不变（对称性）
- 积分曲线沿 y 轴后仍是积分曲线
- $y(x)$ 是解 $\Rightarrow y(x) + C$ 是解

更一般的平面方向场

例

微分方程 $y' = f(x, y)$ 可以该写为微分形式

$$f(x, y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0.$$

更一般的形式为

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0.$$

在点 (x, y) 处的一个向量 $\mathbf{v} = (\xi, \eta)$ 满足该方程，如果

$$P(x, y)\xi + Q(x, y)\eta = 0.$$

该方程确定了过点 (x, y) 的一条直线，从而确定了一个方向场。

曲线 $(x(t), y(t))$ 是方向场

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

的一条积分曲线，当且仅当对任意 t，在点$(x(t), y(t))$ 处，曲线切向量 $(x'(t), y'(t))$ 满足

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

即曲线在其所经之处总是与方向场给定的直线相切。

在平面直角坐标系的每个点 (x, y) 处，给定一个从该点出发的向量 $(P(x,y), Q(x,y))$，这样就得了一个平面向量场 (P, Q)。
曲线 $(x(t), y(t))$ 是方程 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 的积分曲线，当且仅当该曲线在其所经之处总与向量场 (P, Q) 正交。
因此向量场 (P, Q) 确定了一个正交方向场。

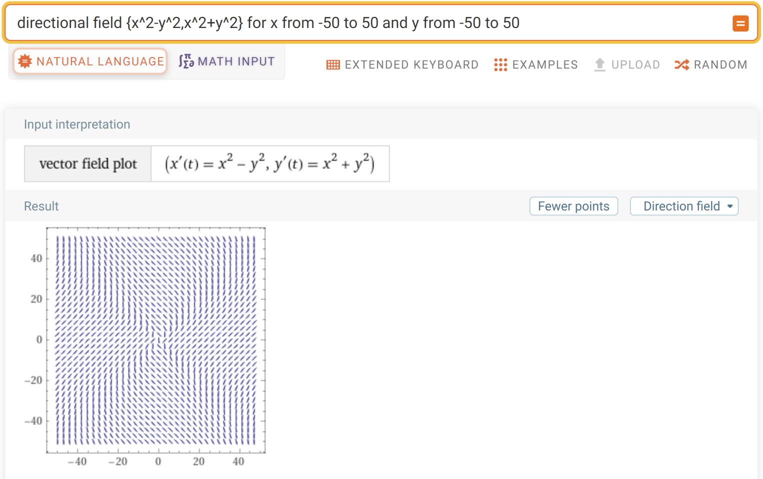

图: 在wolframalpha上画方向场（directional field）

从方向场-积分曲线的角度理解微分方程，x, y 不再拘泥于自变量-函数值的关系，积分曲线也不一定是函数图像。

例

微分方程 $y' = f(y)$ 可以理解为方向场 $\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = 0$，
也可以解释为微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f(y)}$。
后者是最简单的微分方程，可以通过不定积分求得通解。

如果 F 是 f 的任一原函数，则它的反函数 $y = F^{-1}(x)$ 就是微分方程微分方程 $y' = f(y)$ 的解。作为 (x, y) 平面中的曲线，$x = F(y)$ 和 $y = F^{-1}(x)$ 是同一条曲线。虽然我们知道 F 的表达式，但其反函数 F^{-1} 的表达式却不易求得。

这个方向场沿平行于 x 轴方向平移不变，所以积分曲线沿平行于 x 轴方向平移后得到的曲线 $x = F(y) + C$ 仍是积分曲线。

可分离变量的一阶微分方程

即形如

$$p(x)\mathrm{d}x - q(y)\mathrm{d}y = 0$$

的微分方程。
若 P, Q 分别是 p, q 的原函数，则上述方程为

$$\mathrm{d}P(x) = \mathrm{d}Q(y).$$

其通解为

$$P(x) - Q(y) = C, \quad C\text{是任意常数}.$$

在几何上，如果考虑坐标变换 $\xi = P(x), \eta = Q(y)$，则 (x, y) 坐标平面中的方向场 $p(x)\mathrm{d}x - q(y)\mathrm{d}y = 0$ 就变成 (ξ, η) 坐标平面中的方向场 $\mathrm{d}\xi - \mathrm{d}\eta = 0$，这是最简单的微分方程。

例

$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$ 是分离变量方程，它可以写成

$$\mathrm{d}\frac{x^2}{2} + \mathrm{d}\frac{y^2}{2} = 0,$$

所以它的积分曲线为 $x^2 + y^2 = C$，C 是任意常数，即所有以原点为中心的圆。

从几何角度看，系数向量场 (x, y) 是沿过原点的直线，从点 (x, y) 出发的一个向量。上述圆周与这个向量场处处正交，所以这些圆周是微分方程的积分曲线。

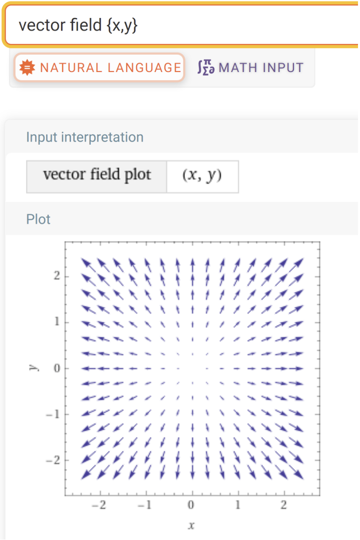

图: 用 Wolframalpha 画向量场 (x,y)，它与方向场 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$ 正交

例 (追逐问题)

四只小狗同时从正方形的四个顶点出发，沿逆时针方向追逐前方那只小狗，任何瞬间它们的速度都相等。求它们的运动轨迹。

解.

设正方形中心在复平面原点，$z(t)=\rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$ 是其中一只小狗在时刻 t 时所处的位置，$v(t)$ 为该时刻小狗的速率。
由对称性，它追逐的那只小狗此时位于 $\mathrm{i}z(t)$。于是

$$z'(t)=v(t)\frac{\mathrm{i}z(t)-z(t)}{|\mathrm{i}z(t)-z(t)|}=\frac{v(t)(\mathrm{i}-1)}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)},$$

另一方面，$z'(t)=\big[\rho'(t)+\rho(t)\mathrm{i}\theta'(t)\big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$，从而

$$\rho'=-\frac{v(t)}{\sqrt{2}},\quad \rho\theta'=\frac{v(t)}{\sqrt{2}}.$$

于是 $\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\rho'}{\rho\theta'}=-1$，用分离变量解得 $\rho(\theta)=C\mathrm{e}^{-\theta}$。 □

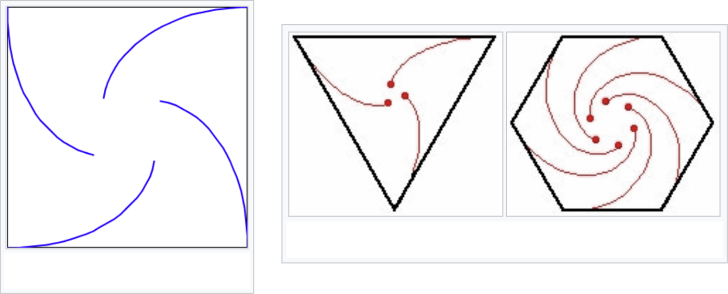

图: 追逐曲线

小狗跑的路程

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^T v(t)\mathrm{d}t = \int_0^T \sqrt{\rho'(t)^2 + (\rho(t)\theta'(t))^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \sqrt{(\rho'_\theta(\theta)\theta'(t))^2 + (\rho(t)\theta'(t))^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_{\theta_0}^{+\infty} \sqrt{{\rho'_\theta}^2 + \rho^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta_0}^{+\infty} \sqrt{(-C\mathrm{e}^{-\theta})^2 + (C\mathrm{e}^{-\theta})^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}C\mathrm{e}^{\theta_0} = \sqrt{2}\rho(0).
\end{aligned}$$

即出发时正方形的边长。

你能对上述结果给一个直接解释吗？

齐次方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的方程称为齐次方程。

对称性：沿从原点出发的射线伸缩时，齐次方程的方向场保持不变。

取 $p = \frac{y}{x}$（射线的斜率）为自变量，以 $z = \ln|x|$（对数使伸缩变为平移）为函数值，则

$$f(p)x\mathrm{d}z = \boxed{f(p)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y} = x\mathrm{d}p + p\mathrm{d}x = x\mathrm{d}p + px\mathrm{d}z,$$

从而得到最简微分方程

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}p}{f(p) - p}.$$

后者是分离变量方程，其通解为

$$z = \int \frac{\mathrm{d}p}{f(p) - p}.$$

对形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

如果

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

有解 (x_0, y_0)，令 $\xi = x - x_0$，$\eta = y - y_0$，则

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2 + b_2\frac{\eta}{\xi}}\right) = g\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

是齐次方程，进一步可以变为可分离变量的方程进行求解。

如果

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

无解，则 (a_1,b_1) 与 (a_2,b_2) 共线，但 (a_1,b_1,c_1) 与 (a_2,b_2,c_2) 不共线。此时

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=k+\frac{c_1-kc_2}{a_2x+b_2y+c_2}, \quad c_1-kc_2\neq 0.$$

此时

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(a_2x+b_2y+c_2).$$

令 $p=a_2x+b_2y+c_2$ 为自变量，则

$$\mathrm{d}p=a_2\mathrm{d}x+b_2\mathrm{d}y=a_2\mathrm{d}x+b_2g(p)\mathrm{d}x$$

从而得到最简微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{a_2+b_2g(p)}-\mathrm{d}x=0.$$

一阶线性方程

形如

$$y' + a(x)y = f(x)$$

的方程。当 $f(x) = 0$ 时，它称为齐次线性方程；否则称为非齐次线性方程，此时 f 称为非齐次项。

齐次线性方程

$$y' + a(x)y = 0$$

可分离变量

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -a(x)\mathrm{d}x,$$

解得

$$\ln|y| = -\int a(x)\mathrm{d}x,$$

从而齐次方程通解为

$$y = C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t}, \quad (C\ \text{是任意常数})$$

常数变易法

常数变易法是处理线性方程的最重要的方法。

对非齐次方程

$$y' + a(x)y = f(x),$$

函数

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t}$$

是解当且仅当

$$\left[(C'(x) - a(x)C(x)) + a(x)C(x)\right]\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t} = f(x),$$

即 $C'(x) = f(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t}$，这是最简单的微分方程，积分得到

$$C(x) = C_0 + \int_{x_0}^{x} f(u)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{u} a(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u.$$

于是得到原方程通解

$$y = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t}\left[C_0 + \int_{x_0}^{x} f(u)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{u} a(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u\right].$$

解的存在性与唯一性

定理 (一阶线性方程解的存在唯一性)

设 $a(x), f(x)$ 都是区间 (α, β) 上的连续函数，则对于任意 $x_0 \in (\alpha, \beta)$ 以及任意 y_0，方程

$$y' + a(x)y = f(x)$$

都有唯一解满足初始条件 $y(x_0) = y_0$。事实上，

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t} y_0 + \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t} \int_{x_0}^{x} f(u)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{u} a(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}u.$$

掌握方法比记住公式更重要!

推论

一阶线性齐次方的全体解构成一个一维线性空间 V_0，
即齐次通解 $=$ 一个齐次非零解 $\times$ 任一常数；
一阶线性非齐次方程的全体解构成一个基于 V_0 的一维仿射空间 $V = y^* + V_0$，即非齐次通解=齐次通解+非齐次特解。

线性方程的叠加原理

叠加原理是线性方程最重要的性质。

定理

设 $a(x), f(x), g(x)$ 连续。若 u, v 分别是

$$u' + a(x)u = f(x)$$

和

$$v' + a(x)v = g(x)$$

的解，则 $\alpha u(x) + \beta v(x)$ 是

$$y' + a(x)y = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

的解。 $\square$

例

解方程

$$y' - 3y = \mathrm{e}^{2x} + x^2.$$

解.

齐次方程 $y' - 3y = 0$ 有非零解 $y = \mathrm{e}^{3x}$，其通解为 $y = C\mathrm{e}^{3x}$。
对非齐次方程 $y' - 3y = \mathrm{e}^{2x}$，用 $y = A\mathrm{e}^{2x}$ 代入，解得 $A = -1$，
所以该方程有特解 $y = -\mathrm{e}^{2x}$。
对非齐次方程 $y' - 3y = x^2$，可以凑得一个多项式特解

$$y = -\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{2}{27}.$$

由前述定理结论，原方程通解为

$$y = C\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x} - \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{2}{27}.$$

以上特解也可以用常数变易法求得。 □

下面我们将举几个以微分方程为模型的应用问题。

我们特别指出：

- 微分方程是建立确定性（即不含随机性因素）数学模型的重要工具。
- 任何模型都是在特定条件下对实际现象的近似描述，好的模型可以对现象给出合理解释。
- 任何模型都有其适用条件，不加分析地滥用模型的结论是有害的。
- 适当的人为假设可以使模型便于研究，但也会带来问题。

例 (Ernest Rutherford)

放射性物质衰变

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\lambda m$$

其解为

$$m(t) = m(0)\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

当 $m(T) = m(0)/2$ 时解得

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

这就是半衰期（half-life）。

例 (Malthus，1766-1834)

在环境资源充裕的情况下，种群数量近似服从以下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y.$$

其解为

$$y(t) = y(t_0)\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}.$$

但当资源不充裕时，这个模型并不符合实际。

例（“离离原上草，一岁一枯荣”）

如果增长率随季节波动，可以考虑以下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (\lambda_0 + a\sin(\omega t))y.$$

这是变系数线性齐次微分方程，它的解为

$$y(t) = y_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \lambda_0 + a\sin(\omega s)\mathrm{d}s} = y_0 \mathrm{e}^{\lambda_0(t-t_0) - \frac{a(\cos(\omega t) - \cos(\omega t_0))}{\omega}}.$$

例 (周期系数的线性方程)

设 $\lambda(t)$ 是连续的周期函数，周期 $T > 0$。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda(t)y$$

的解 $y(t)$ 是否/何时为 T-周期函数？当 $t \to +\infty$ 时，$y(t)$ 的性态与函数 $\lambda(t)$ 的哪些性质有关？

证明.

$$y(t+T)=y(t)\mathrm{e}^{\int_t^{t+T}\lambda(s)\mathrm{d}x}=y(t)\mathrm{e}^{\int_0^T\lambda(s)\mathrm{d}x}=y(t)\mathrm{e}^{T\overline{\lambda}},$$

其中 $\overline{\lambda}=\frac{1}{T}\int_0^T\lambda(s)\mathrm{d}s$ 是 λ 在一个周期中的平均值。

当 $\overline{\lambda}=0$ 时，$y(t)$ 都是周期函数，周期为 T。

记 m 和 M 是 $|y(t)|$ 在区间 $[0,T]$ 中的最小值和最大值。
如果 $y(t_0)=0$，则 $y(t)=y(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t\lambda(s)\mathrm{d}s}=0$。

对任意 $t>0$，取非负整数 n 使得 $nT\le t<(n+1)T$，于是

$$|y(t)|=\left|y(t-nT)\mathrm{e}^{n\overline{\lambda}T}\right|\in\left[m\mathrm{e}^{n\overline{\lambda}T},M\mathrm{e}^{n\overline{\lambda}T}\right].$$

因此
当 $\overline{\lambda}>0$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}|y(t)|=+\infty$；
当 $\overline{\lambda}<0$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}|y(t)|=0$。 $\square$

例 (Newton 冷却定律，1701)

物体温度 T 随时间的变化率与物体温度 T 和环境温度 $T_{环境}$ 的差 $T_{环境} - T$ 成正比。

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \lambda(T_{环境} - T).$$

齐次方程通解为 $T(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$；
常数变易法，令 $T(t) = C(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$，则 $C'(t)\mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda T_{环境}$。
解得

$$C(t) = C_0 + T_{环境}\mathrm{e}^{\lambda t},$$

所以 $T(t) = T_{环境} + C_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$。（事实上 $T = T_{环境}$ 是原方程的一个特解。这个事实可以帮助我们省去常数变易过程）所以

$$T(t) = T_{环境} + (T_0 - T_{环境})\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = T_{环境}$。

一些非线性方程

例 (种群Logistic模型，Pierre François Verhulst，1838)

$$y' = \lambda y\left(1-\frac{y}{N}\right).$$

种群数量增长受资源环境限制。当 y 较小时，种群增长率近似与 y 成正比；随着 y 增大，增长率降低；当 y 接近于 N 时，种群增长率接近零；当 y 大于 N 时，种群增长率为负。
这是一个可分离变量的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(N-y)} = \frac{\lambda \mathrm{d}x}{N},$$

解得

$$\frac{y}{N-y} = \frac{y_0}{N-y_0}\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{N}(x-x_0)}, \quad y(x) = \frac{Ny_0\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{N}(x-x_0)}}{N-y_0+y_0\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{N}(x-x_0)}}.$$

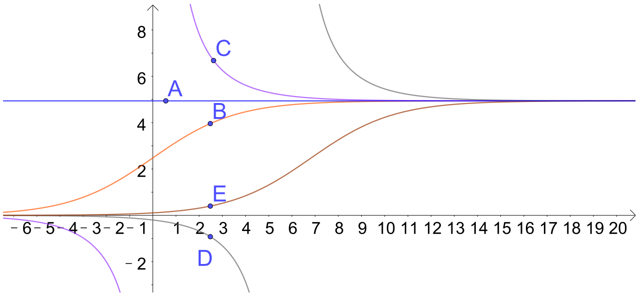

图: Logistic方程的积分曲线

上面的 Logistic 方程是以下 Bernoulli 方程的一个特例。

例 (Bernoulli 方程，Jacob Bernoulli，1695)

$$y' + a(x)y = f(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 0, 1.$$

它等价于

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{y^{\alpha-1}}\right)' + a(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = f(x),$$

这是关于 $y^{1-\alpha}$ 的一个线性方程。
当 $a(x), f(x)$ 都是常值时，Bernoulli方程是一个可分离变量方程。

在流体力学中，也有一个著名的 Bernoulli 方程，那是 Daniel Bernoulli 在1738年得到的。Daniel是 Jacob 的侄子，即 Jacob的弟弟 Johann 的儿子。

例 (Ricatti 方程，Jacopo Francesco Riccati，1724)

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2.$$

常系数的 Ricatti 方程是可分离变量的方程。

如果已知 Ricatti 方程的一个特解 $y_1(x)$，则可以求得其通解。
令 $y = y_1 + \frac{1}{u}$，则

$$\begin{aligned}
-\frac{u'}{u^2} = y' - y_1' &= a_1(x)y + a_2(x)y^2 - a_1(x)y_1 - a_2(x)y_1^2 \\
&= a_1(x)\frac{1}{u} + a_2(x)\left(\frac{1}{u} + y_1\right)^2 - a_2(x)y_1^2 \\
&= \left[a_1(x) + 2a_2(x)y_1(x)\right]\frac{1}{u} + a_2(x)\frac{1}{u^2}.
\end{aligned}$$

从而得到一阶线性方程

$$u' = \left[a_1(x) + 2a_2(x)y_1(x)\right]u + a_2(x).$$