习题讨论课13题目：高阶微分方程

★号（越）多表示题目（越）难

一、可降阶的高阶方程

【不显含 y 的高阶方程】

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

等价于方程组

$$\begin{cases} F(x, u, u', \dots, u^{(n-k)}) = 0, \\ y^{(k)} = u. \end{cases}$$

【不显含 x 的高阶方程】

$$F(y, y'_x, y''_x, \dots, y_x^{(n)}) = 0.$$

令 $z = y'_x$. 对任意函数 $u = u(x) = u(x(y))$，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y},$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^n y = \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^{n-1} z,$$

此时原方程称为

$$\begin{cases} F\left(y, z, \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right) z, \dots, \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^{n-1} z\right) = 0, \\ y'_x = z. \end{cases}$$

例 1. 设曲线 $y = y(x)$ 的曲率为常数 $\kappa > 0$. 求 $y(x)$.

例 2.

$$2yy'' - y'^2 = 0$$

【高阶线性微分方程用因式分解降阶】

例 3.

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2\mathrm{e}^x$$

【利用常数变易法对高阶线性微分方程降阶】

讨论：是否存在常数 α, β 使得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha\right)\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \beta\right) y = xy'' - (x+1)y' + y?$$

例 4 (欧拉方程)**.**

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x$$

注： 理论上，常系数线性方程和欧拉方程是注定能通过因式分解转化为一阶线性方程组的。

二、高阶线性微分方程

【高阶线性常系数微分方程】

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) y = f(x)$$

其中 $P(\cdot)$ 是一个多项式。

易见

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{e}^{\lambda x} = P(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

这只需对 P 是单项式验证即可。

两边对 λ 求 k 阶导得到

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) x^k\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[x^kP(\lambda) + kx^{k-1}P'(\lambda) + \cdots + kxP^{(k-1)}(\lambda) + P^{(k)}(\lambda)\right].$$

由此见：

1. $\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$ 是齐次方程 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)y = 0$ 的解当且仅当 $P(\lambda_0) = 0$，λ_0 是特征指数。

2. 若 λ_0 是多项式 $P(\lambda)$ 的 k 重根，即

$$P(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = \cdots = P^{(k-1)}(\lambda_0) = 0, \quad P^{(k)}(\lambda_0) \neq 0,$$

   则 $\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, \mathrm{e}^{\lambda_0 x}x, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_0 x}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ 都是齐次微分方程 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)y = 0$ 的解。同时 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\mathrm{e}^{\lambda_0 x}\frac{x^k}{k!}\right) \neq 0$.

3. $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ 是拟多项式空间 $\mathscr{P}_{k,\lambda}$ 到自身的线性变换，在向量组

$$\mathrm{e}^{\lambda x}, \mathrm{e}^{\lambda x}x, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda x}\frac{x^k}{k!}$$

   下，它的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} P(\lambda) & P'(\lambda) & \frac{P''(\lambda)}{2} & \cdots & \frac{P^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} & \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} \\ 0 & P(\lambda) & P'(\lambda) & \cdots & \frac{P^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} & \frac{P^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P(\lambda) & P'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

   如果 λ_0 不是 $P(\lambda)$ 的根，则 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ 在空间 $\mathscr{P}_{k,\lambda_0}$ 上是可逆映射。如果 λ_0 是 $P(\lambda)$ 的单根，则 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ 是空间 $\mathscr{P}_{k+1,\lambda_0}$ 到空间 $\mathscr{P}_{k,\lambda_0}$ 的满射。如果 λ_0 是 $P(\lambda)$ 的 m 重根，则 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ 是空间 $\mathscr{P}_{k+m,\lambda_0}$ 到空间 $\mathscr{P}_{k,\lambda_0}$ 的满射。

利用上述结论(1)和代数学基本定理，可知常系数线性微分方程有解。使用指数函数解对常系数线性微分方程进行常数变易法降阶，仍然得到常系数线性方程组。

利用上述结论(2)可以证明不同指数、不同次数的拟多项式是线性无关的。(1)结合(2)可以得到 n 阶常系数齐次线性方程的 n 个线性无关解（详见下面例题）。进而齐次方程通解是它们的任意线性组合。

利用结论(3)，我们可以对拟多项式形式的非齐次项给出非齐次方程特解的形式，从而用待定系数法可以求得特解。

例 5. 设 $\alpha \neq \beta$. 利用适当的微分方程证明以下函数

$$\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \mathrm{e}^{\alpha x} x, \quad \mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^2}{2}, \quad \mathrm{e}^{\beta x}, \quad \mathrm{e}^{\beta x} x, \quad \mathrm{e}^{\beta x}\frac{x^2}{2}$$

线性无关。

例 6.

$$y^{(4)} - y^{(3)} - 3y'' + y' + 2y = 3x + 4.$$

【常数变易法】

例 7.

$$y'' + y = \sin x.$$

【Euler 方程】

例 8.

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0.$$