习题讨论课13答案：高阶微分方程

★号（越）多表示题目（越）难

一、可降阶的高阶方程

【不显含 y 的高阶方程】

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

等价于方程组

$$\begin{cases} F(x, u, u', \ldots, u^{(n-k)}) = 0, \\ y^{(k)} = u. \end{cases}$$

【不显含 x 的高阶方程】

$$F(y, y'_x, y''_x, \ldots, y^{(n)}_x) = 0.$$

令 $z = y'_x$. 对任意函数 $u = u(x) = u(x(y))$，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y},$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^n y = \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^{n-1} z,$$

此时原方程称为

$$\begin{cases} F\left(y, z, \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)z, \ldots, \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^{n-1} z\right) = 0, \\ y'_x = z. \end{cases}$$

例 1. 设曲线 $y = y(x)$ 的曲率为常数 $\kappa > 0$. 求$y(x)$.

解法1.

$$\frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \kappa.$$

不妨设 $y'' > 0$. 这是可降阶方程，令 $u = y'$，则

$$u' = \kappa(\sqrt{1+u^2})^3,$$

这是分离变量的一阶方程，

$$\frac{\mathrm{d}u}{(\sqrt{1+u^2})^3} = \kappa \mathrm{d}x$$

令 $u=\tan\theta$，则
$$\cos\theta\mathrm{d}\theta=\kappa\mathrm{d}x,$$
从而
$$\sin\theta=\kappa x+C,$$
$$y'=u=\tan\theta=\frac{\kappa x+C_1}{\sqrt{1-(\kappa x+C_1)^2}}$$
积分得到
$$y=C_2-\frac{\sqrt{1-(\kappa x+C_1)^2}}{\kappa},$$
即
$$(y-C_2)^2+\left(x+\frac{C_1}{\kappa}\right)^2=\frac{1}{\kappa^2}.$$
即曲线是半圆周。 □

解法2. 不妨设 $y''>0$. 则
$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}=\kappa.$$
这是不显含 x 的可降阶方程，令 $u=y'_x$，则
$$\kappa(\sqrt{1+u^2})^3=y''_x=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y},$$
这是关于 u 的分离变量的一阶方程，记 $v=\sqrt{1+u^2}$，则
$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=2\kappa\mathrm{d}y,$$
从而
$$y'_x=u=\sqrt{v^2-1}=\sqrt{\frac{1}{(2\kappa y+C_1)^2}-1}$$
令 $2\kappa y+C_1=\cos\theta$，则
$$x'_\theta=x'_y y'_\theta=\frac{1}{\tan\theta}\frac{-\sin\theta}{2\kappa}=-\frac{\cos\theta}{2\kappa},$$
从而
$$x=C_2-\frac{\sin\theta}{2\kappa},\quad y=-\frac{C_1}{2\kappa}+\frac{\cos\theta}{2\kappa},$$
即曲线是半圆周。 □

例 2.
$$2yy''-y'^2=0$$

解. 求导得到

$$2yy^{(3)} = 0$$

从而 $y = 0$ 或 $y^{(3)} = 0$，因此

$$y(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

但这造成了增解，二阶方程通解只能有两个任意常数，所以需要代入原方程验证，

$$2(Ax^2 + Bx + C)2A - (2Ax + B)^2 = 0$$

即得

$$4AC = B^2,$$

所以原方程通解为

$$y(x) = Ax^2 \pm 2\sqrt{AC}x + C.$$

□

解法2. 用通常的降阶法，设 $u = y'_x$，则 $y''_x = u'_x = u'_y u$，于是

$$2yuu'_y - u^2 = 0,$$

解得 $u = 0$ 或 $2yu'_y = u$，前者得到 y 是常值函数，后者得到

$$u^2 = C|y|.$$

从而

$$y'_x = \pm\sqrt{C|y|} = \tilde{C}\sqrt{|y|}.$$

这是分离变量的一阶方程，由它解得

$$C_1 x + C_2 = \sqrt{|y|},$$

所以 $|y| = (C_1 x + C_2)^2.$ □

【高阶线性微分方程用因式分解降阶】

例 3.

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2\mathrm{e}^x$$

解.

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \beta\right)y = \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha\right)(y' - \beta y) = xy'' - x\beta y' - \alpha y' + \alpha\beta y$$

与原方程比较系数得到：$\beta = \alpha = 1$，于是原方程等价于

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right)y = x^2\mathrm{e}^x,$$

这等价于方程组

$$\begin{cases} y' - y = z, \\ xz' - z = x^2 \mathrm{e}^x. \end{cases}$$

对上述方程组的第二个方程，设 $z = \mathrm{e}^x P(x)$，则

$$\mathrm{e}^x (xP' + xP - P) = x^2 \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$$

易见 $P(x) = x$ 满足这个方程，于是得到特解

$$y(x) = x\mathrm{e}^x.$$

第二个方程的通解为

$$z(x) = C_1 x + x\mathrm{e}^x.$$

此时第一个方程为

$$y' - y = C_1 x + x\mathrm{e}^x.$$

这个方程的通解为

$$y(x) = C_2 \mathrm{e}^x - C_1(x+1) + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x.$$

□

【利用常数变易法对高阶线性微分方程降阶】

上例解法2. 对齐次方程因式分解

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right) y = 0$$

由 $y' - y = 0$ 解得 $y = \mathrm{e}^x$. 常数变易，把 $y(x) = C(x)\mathrm{e}^x$ 代回原方程得到

$$\mathrm{e}^x[xC'' + 2xC' + xC - (x+1)(C'+C) + C] = \mathrm{e}^x[xC'' + (x-1)C'] = x^2\mathrm{e}^x,$$

即

$$xC'' + (x-1)C' = x^2.$$

这是关于 C' 的一阶线性方程（这样就完成了降阶），解得

$$C'(x) = C_1 x\mathrm{e}^{-x} + x.$$

从而

$$C(x) = -C_1\,(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2} + C_2.$$

因此原方程通解为

$$y(x) = C_2\mathrm{e}^x - C_1\,(x+1) + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x.$$

□

讨论：是否存在常数 α, β 使得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha\right)\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \beta\right) y = xy'' - (x+1)y' + y?$$

例 4 (**欧拉方程**).

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x$$

解.

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha\right)\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \beta\right) y = x^2y'' - 2xy' + 2y$$

所以 $1 - \alpha - \beta = -2, \quad \alpha\beta = 2$，解得 $\alpha = 1, \beta = 2$，所以原方程等价于方程组

$$\begin{cases} xy' - y = z, & (1) \\ xz' - 2z = 2x & (2) \end{cases}$$

(2)的齐次通解为 $z = C_1x^2$，(2)非齐次特解为 $z = -2x$，因此(2)的通解为

$$z = C_1x^2 - 2x.$$

代入方程(1)，得到

$$xy' - y = C_1x^2 - 2x. \tag{3}$$

(3)的齐次通解为 $y = C_2x$，特解为 $y = C_1x^2 - 2x\ln x$，从而(3)的通解即原方程通解为

$$y(x) = C_2x + C_1x^2 - 2x\ln x.$$

□

解法2. 读者也可以试用齐次方程的一个解通过常数变易法降阶求解。 □

注：理论上，常系数线性方程和欧拉方程是注定能通过因式分解转化为一阶线性方程组的。

二、高阶线性微分方程

【高阶线性常系数微分方程】

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) y = f(x)$$

其中 $P(\cdot)$ 是一个多项式。

易见

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{e}^{\lambda x} = P(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

这只需对 P 是单项式验证即可。

两边对 λ 求 k 阶导得到

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) x^k\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[x^kP(\lambda) + kx^{k-1}P'(\lambda) + \cdots + kxP^{(k-1)}(\lambda) + P^{(k)}(\lambda)\right].$$

由此见：

1. $\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$ 是齐次方程 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)y=0$ 的解当且仅当 $P(\lambda_0)=0$，λ_0 是特征指数。

2. 若 λ_0 是多项式 $P(\lambda)$ 的 k 重根，即

$$P(\lambda_0)=P'(\lambda_0)=\cdots=P^{(k-1)}(\lambda_0)=0,\quad P^{(k)}(\lambda_0)\neq 0,$$

   则 $\mathrm{e}^{\lambda_0 x},\mathrm{e}^{\lambda_0 x}x,\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_0 x}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ 都是齐次微分方程 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)y=0$ 的解。同时 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\mathrm{e}^{\lambda_0 x}\frac{x^k}{k!}\right)\neq 0.$

3. $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ 是拟多项式空间 $\mathscr{P}_{k,\lambda}$ 到自身的线性变换，在向量组

$$\mathrm{e}^{\lambda x},\mathrm{e}^{\lambda x}x,\ldots,\mathrm{e}^{\lambda x}\frac{x^k}{k!}$$

   下，它的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix}
P(\lambda) & P'(\lambda) & \frac{P''(\lambda)}{2} & \cdots & \frac{P^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} & \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}\\
0 & P(\lambda) & P'(\lambda) & \cdots & \frac{P^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} & \frac{P^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & P(\lambda) & P'(\lambda)\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & P(\lambda)
\end{pmatrix}$$

   如果 λ_0 不是 $P(\lambda)$ 的根，则 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ 在空间 $\mathscr{P}_{k,\lambda_0}$ 上是可逆映射。如果 λ_0 是 $P(\lambda)$ 的单根，则 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ 是空间 $\mathscr{P}_{k+1,\lambda_0}$ 到空间 $\mathscr{P}_{k,\lambda_0}$ 的满射。如果 λ_0 是 $P(\lambda)$ 的 m 重根，则 $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ 是空间 $\mathscr{P}_{k+m,\lambda_0}$ 到空间 $\mathscr{P}_{k,\lambda_0}$ 的满射。

利用上述结论(1)和代数学基本定理，可知常系数线性微分方程有解。使用指数函数解对常系数线性微分方程进行常数变易法降阶，仍然得到常系数线性方程组。

利用上述结论(2)可以证明不同指数、不同次数的拟多项式是线性无关的。(1)结合(2)可以得到 n 阶常系数齐次线性方程的 n 个线性无关解（详见下面例题）。进而齐次方程通解是它们的任意线性组合。

利用结论(3)，我们可以对拟多项式形式的非齐次项给出非齐次方程特解的形式，从而用待定系数法可以求得特解。

例 5. 设 $\alpha\neq\beta$. 利用适当的微分方程证明以下函数

$$\mathrm{e}^{\alpha x},\quad \mathrm{e}^{\alpha x}x,\quad \mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^2}{2},\quad \mathrm{e}^{\beta x},\quad \mathrm{e}^{\beta x}x,\quad \mathrm{e}^{\beta x}\frac{x^2}{2}$$

线性无关。

证明. 假设常数 $C_1,C_2,\ldots,C_6$ 使得

$$y:=C_1\mathrm{e}^{\alpha x}+C_2\mathrm{e}^{\alpha x}x+C_3\mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^2}{2}+C_4\mathrm{e}^{\beta x}+C_5\mathrm{e}^{\beta x}x+C_6\mathrm{e}^{\beta x}\frac{x^2}{2}=0.$$

则

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha\right)^3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\beta\right)^2 y \\
&= C_6\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha\right)^3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\beta\right)^2 \mathrm{e}^{\beta x}\frac{x^2}{2} \\
&= C_6\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha\right)^3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\beta\right) \mathrm{e}^{\beta x}x \\
&= C_6\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha\right)^3 \mathrm{e}^{\beta x} \\
&= C_6(\beta-\alpha)^3\mathrm{e}^{\beta x}
\end{aligned}
$$

所以 $C_6=0$. 类似可知 $C_5=C_4=C_3=C_2=C_1=0$. 所以

$$
\mathrm{e}^{\alpha x},\quad \mathrm{e}^{\alpha x}x,\quad \mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^2}{2},\quad \mathrm{e}^{\beta x},\quad \mathrm{e}^{\beta x}x,\quad \mathrm{e}^{\beta x}\frac{x^2}{2}
$$

线性无关。 □

例 6.

$$
y^{(4)}-y^{(3)}-3y''+y'+2y=3x+4.
$$

解. 先考虑齐次方程。

特征多项式为

$$
\lambda^4-\lambda^3-3\lambda^2+\lambda+2=(\lambda+1)^2(\lambda-1)(\lambda-2),
$$

$\lambda=-1$ 是特征根，所以 e^{-x} 是齐次方程的一个非零解。

常数变易 $y=C(x)\mathrm{e}^{-x}$，代入得到

$$
\begin{array}{r|r}
y^{(4)} & C^{(4)}\mathrm{e}^{-x}-4C^{(3)}\mathrm{e}^{-x}+6C^{(2)}\mathrm{e}^{-x}-4C'\mathrm{e}^{-x}+C\mathrm{e}^{-x} \\
-y^{(3)} & -C^{(3)}\mathrm{e}^{-x}+3C^{(2)}\mathrm{e}^{-x}-3C'\mathrm{e}^{-x}+C\mathrm{e}^{-x} \\
-3y^{(2)} & -3C^{(2)}\mathrm{e}^{-x}+6C'\mathrm{e}^{-x}-3C\mathrm{e}^{-x} \\
y' & C'\mathrm{e}^{-x}-C\mathrm{e}^{-x} \\
2y & 2C\mathrm{e}^{-x} \\
\hline
\Sigma & C^{(4)}\mathrm{e}^{-x}-5C^{(3)}\mathrm{e}^{-x}+6C^{(2)}\mathrm{e}^{-x}+0C'\mathrm{e}^{-x}+0C\mathrm{e}^{-x}
\end{array}
$$

所以

$$
C^{(4)}-5C^{(3)}+6C^{(2)}=0.
$$

这是关于 $C^{(2)}$ 的二阶常系数线性方程（能够降两阶是因为 -1 是原齐次方程特征多项式的二重根），$\lambda=2$ 是其特征根，所以设 $C^{(2)}(x)=\mathrm{e}^{2x}B(x)$，代入并整理得到

$$
B^{(2)}-B'=0.
$$

这是关于 B' 的一阶常系数微分方程，$\lambda = 1$ 是它的齐次方程的特征根，设 $B' = A(x)\mathrm{e}^x$，代入整理得到

$$A' = 0,$$

解得 $A(x) = A_1$. 从而 $B' = A_1\mathrm{e}^x$，解得

$$B(x) = A_1\mathrm{e}^x + B_1.$$

因此 $C''(x) = B(x)\mathrm{e}^{2x} = A_1\mathrm{e}^{3x} + B_1\mathrm{e}^{2x}$，解得

$$C(x) = A_2\mathrm{e}^{3x} + B_2\mathrm{e}^{2x} + C_2x + D_2.$$

所以齐次方程的解为

$$y(x) = A_2\mathrm{e}^{2x} + B_2\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^{-x} + D_2\mathrm{e}^{-x}.$$

接下来求非齐次方程特解，易知有形如 $Ex + F$ 形式的特解，代入得到

$$E + (2Ex + 2F) = 3x + 4$$

所以 $E = \frac{3}{2}$，$F = \frac{5}{2}$. 从而原方程通解为

$$y(x) = A_2\mathrm{e}^{2x} + B_2\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^{-x} + D_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2},$$

其中前四项分别对应于齐次方程特征多项式的的特征根 $2, 1$ 和 -1（二重）。 $\square$

【常数变易法】

例 7.

$$y'' + y = \sin x.$$

解. 令 $z = y'$，把上述二阶方程改写为一阶方程组

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix},$$

齐次部分的一对线性无关解为

$$\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix},$$

它们给出可逆矩阵

$$U(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad U'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} U(x).$$

设 y 是非齐次方程的解，且

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = U(x)\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' &= U'(x)\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} + U\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} U(x)\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} + U(x)\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix}',\end{aligned}$$

所以

$$\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix}' = U(x)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2 x \\ \cos x \sin x \end{pmatrix}$$

所以

$$C_1(x) = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{2} + A, \qquad C_2(2) = \frac{-\cos 2x}{4} + B,$$

所以

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x \\ &= \frac{\sin 2x \cos x}{4} - \frac{x}{2}\cos x + A\cos x - \frac{\cos 2x \sin x}{4} + B\sin x \\ &= \frac{\sin x}{4} - \frac{x}{2}\cos x + A\cos x + B\sin x. \end{aligned}$$

□

【Euler 方程】

例 8.

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

解. 取 $t = \ln|x|$，则

$$y'_x = y'_t t'_x = \frac{1}{x}y'_t,$$

所以 $xy'_x = y'_t$，从而

$$y''_t = \big(y'_t\big)'_t = x\big(xy'_x\big)'_x = x(y'_x + xy''_x) = x^2y''_x + xy'_x,$$

因此

$$x^2y''_x = y''_t - y'_t,$$

从而原方程写成

$$y''_t - y'_t + 3y'_t + y = y''_t + 2y'_t + y = 0,$$

这是常系数线性微分方程，解得

$$y(t) = C_1 t\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-t},$$

从而

$$y(x) = C_1\frac{1}{|x|}\ln|x| + \frac{C_2}{|x|}.$$

□

解法2. 利用因式分解

$$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+1\right)\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+1\right)y=0.$$

余下留给读者完成。 □