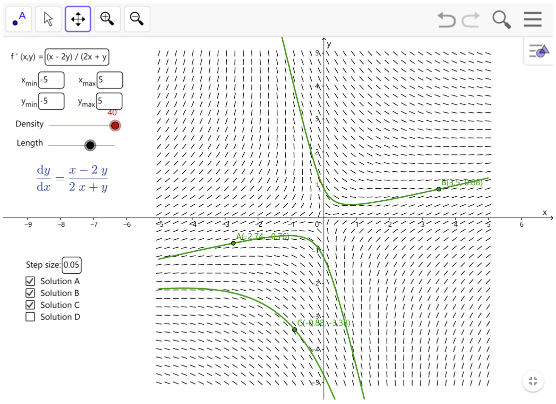
习题讨论课12题目：常微分方程

★号（越）多表示题目（越）难

一、一阶微分方程

【一阶微分方程和斜率场】

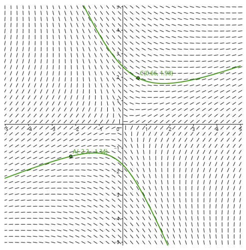


在坐标平面的每个点 (x, y) 处，微分方程 $y' = f(x, y)$ 给出一个斜率值 $f(x, y)$，这样形成一个**斜率场**（也称为**方向场**）。微分方程的解 $y = y(x)$ 的函数图像（称为斜率场的**积分曲线**）所经之处的切线斜率都与斜率场的值相同。

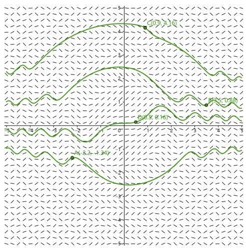
例 1. 画出以下微分方程的斜率场的大致图像，并根据斜率场的特点说明方程的解的特征。

(1) $y' = x(1-x)$,　　(2) $y' = \frac{y}{1+y^2}$,　　(3) $y' = \frac{x-y}{x+y}$,　　(4) $y' = \sin(x^2+y^2)$

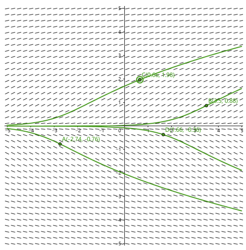
以下图像中哪些是上述方程的斜率场和积分曲线？



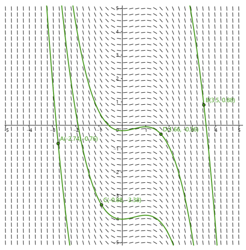
(a)



(b)



(c)



(d)

【一阶微分方程的求解】

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

是最简单的常微分方程，它的解的存在性可由微积分基本定理保证（当 f 连续时，它总有解），解的表达式可由 Newton-Leibniz 公式得到。

对复杂的微分方程，我们需要做适当变换，把它转化为最简单的微分方程的形式后求解。

例 2. 求以下微分方程的通解。

(1) $y' = x(1-x)$, (2) $y' = \frac{y}{1+y^2}$, (3) $y' = \frac{x-y}{x+y}$, (4) $y' = (x+y+3)^2$

讨论：

1. 微分方程和它的解究竟是什么？解的图形一定是函数图像吗？
   一阶微分方程 $F(x, y, y') = 0$ 的解允许是由代数方程 $G(x, y) = C$ 表示的曲线，函数 G 叫做微分方程的首次积分，物理上它是一个守恒量。

2. 微分方程具有的对称性（变换下的不变性）意味着它存在某种形式的首次积分，即某种守恒量。

3. 可以利用微分方程的对称性得到求解微分方程的方法。关于这方面，感兴趣的读者可以阅读 N.H.Ibragimov 的专著《微分方程与数学物理问题》（中译本，高等教育出版社，2013年第二版）

例 3 (齐次方程). 平面直角坐标系中，与 y 轴平行的光线经曲线 $y = y(x)$ 反射后汇聚于原点。求曲线的方程。

例 4. 求下列方程的解。

(1) $y' = \dfrac{x(y-1)}{y+xy}$ (2) $y' = \sqrt{xy}$

(3) $(1+\mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x, y(1) = 1$ (4) $(1-x)\mathrm{d}y = (1+y)\mathrm{d}x$

(5) $3x\mathrm{d}y - y(2 - x\cos x)\mathrm{d}x = 0$ (6) $(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 0$

【一阶微分式形式的微分方程与平面向量场的正交曲线族】

一阶微分式形式的微分方程

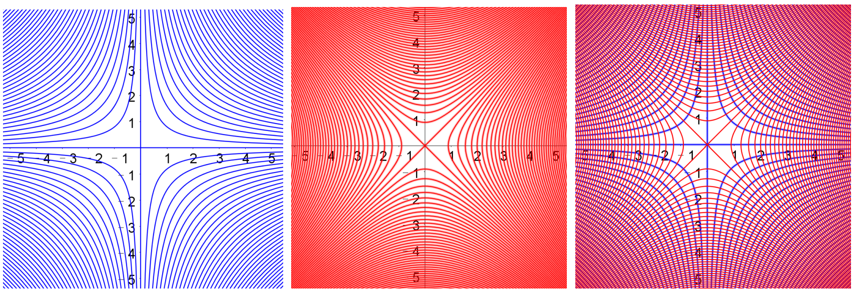
$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

是一阶常微分方程的一种表达形式，其中 x, y 的地位是对等的，不再强调谁是自变量，谁是因变量。(x, y) 坐标平面中的曲线 $\gamma : (x(t), y(t))$ 是它的积分曲线，当且仅当

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0. \tag{*}$$

在直角坐标系中，$(P(x, y), Q(x, y))$ 是点 (x, y) 处的一个向量，这给出平面上的一个**向量场**。γ 是方程(*)的积分曲线，当且仅当它在其所经之处总是与向量场 (P, Q) 正交。所以上述微分方程的通解就是向量场 (P, Q) 的正交曲线族。

例 5. 求曲线族 $xy=C$ 的正交曲线族。



二、一阶线性方程

【一阶线性齐次方程】

$$y'+a(x)y=0.$$

利用分离变量求解，也可以直接凑：

$$\mathrm{e}^{A(x)}(y'+a(x)y)=\left(\mathrm{e}^{A(x)}y(x)\right)'=0,$$

其中 $A'(x)=a(x)$.

由此得到

$$\mathrm{e}^{A(x)}y(x)=C,$$

即

$$y(x)=C\mathrm{e}^{A(x)}.$$

【一阶线性非齐次方程】

$$y'+a(x)y=f(x),$$

$$\left(\mathrm{e}^{A(x)}y(x)\right)'=\mathrm{e}^{A(x)}f(x),$$

于是

$$\mathrm{e}^{A(x)}y(x)=\int \mathrm{e}^{A(x)}f(x)\mathrm{d}x$$

从而

$$y(x)=\mathrm{e}^{-A(x)}\int \mathrm{e}^{A(x)}f(x)\mathrm{d}x,$$

但这个写法容易引起混淆，所以我们把它写成变上限的定积分形式

$$y(x)=\mathrm{e}^{-A(x)}\left[C_0+\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{A(t)}f(t)\mathrm{d}x\right]=\boxed{\mathrm{e}^{-A(x)}C_0}+\boxed{\mathrm{e}^{-A(x)}\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{A(t)}f(t)\mathrm{d}x},$$

最后的两个求和项分别是齐次方程通解，以及非齐次方程的一个特解。

【解的存在性与唯一性】

由上述讨论知：若 $a(x),f(x)$ 都是连续函数，则对任意 (x_0,y_0)，一阶线性方程 $y'+a(x)y=f(x)$ 有唯一解满足初始条件 $y(x_0)=y_0$.

【线性叠加原理】

若 y_1, y_2 分别是线性方程 $Ly = f_1$ 和 $Ly = f_2$ 的解，则 $\alpha y_1 + \beta y_2$ 是方程 $Ly = \alpha f_1 + \beta f_2$ 的解。

推论：

(1) $Ly = 0$ 的解空间是一个线性空间，

(2) $Ly = f$ 的解空间是一个基于线性空间 $L^{-1}(0)$ 的仿射空间，即非齐次方程通解是齐次方程通解与非齐次方程的一个特解的和，

(3) 可以根据非齐次项的分解 $f = \alpha f_1 + \cdots + \alpha_k f_k$，把 $Ly = f$ 的特解分解为 $Ly = f_k$ 的特解的线性组合。

例 6. 证明一阶线性方程 $xy' - \left(2x^2+1\right) y = x^2 (x > 0)$ 有且仅有一个解 $y^*(x)$ 当 $x \to +\infty$ 存在有限极限。写出解 $y^*(x)$ 的表达式，并求这个极限。

例 7. 设 $f(x)$ 是连续的周期函数，周期为 $T > 0$. 对方程

$$y' - \lambda y = f(x)$$

讨论：(1) 有界解的个数；(2) T-周期解的个数。

例 8 (Gronwall 不等式). 设 φ, ψ 是非负的连续函数，η 是可微函数，η' 是 Riemann 可积函数，且

$$\eta'(t) \le \varphi(t)\eta(t) + \psi(t).$$

证明对任意 $t > 0$，

$$\eta(t) \le \mathrm{e}^{\int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s\right].$$

【具有拟多项式非齐次项的常系数线性微分方程】

形如 $\mathrm{e}^{\alpha x}P(x)$ 的函数称为 **拟多项式**。

$$\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^n}{n!}\right)' = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \alpha\frac{x^n}{n!}\right),$$

例 9. 记 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 是所有形如形如 $\mathrm{e}^{\alpha x}P(x)$（其中 P 是次数不超过 n 的多项式）的拟多项式组成的线性空间。证明：

(1) 对 $\lambda \in \mathbb{R}$，若 $\alpha \ne \lambda$，则对任意 $f \in \mathscr{P}_{\alpha,n}$，$y' - \lambda y = f$ 在 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 中有唯一解。

(2) 对任意 $f \in \mathscr{P}_{\lambda,n}$，$y' - \lambda y = f$ 在 $\mathscr{P}_{\lambda,n+1}$ 中有无穷多解，这些解彼此相差指数函数 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的一个常数倍数。

例 10. (1) $y' - 2y = \mathrm{e}^x x^2$； (2) $y' + y = \sin x$； (3) $y' - y = \mathrm{e}^x x$.

三、可线性化的一阶非线性微分方程

例 11. (1) $y' + 2xy = 2x^3 y^2$；(2) $y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$