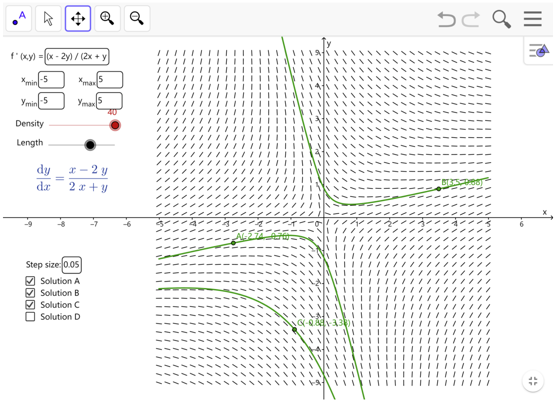
习题讨论课12答案：常微分方程

★号（越）多表示题目（越）难

一、一阶微分方程

【一阶微分方程和斜率场】

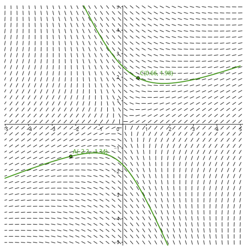


在坐标平面的每个点 (x, y) 处，微分方程 $y' = f(x, y)$ 给出一个斜率值 $f(x, y)$，这样形成一个**斜率场**（也称为**方向场**）。微分方程的解 $y = y(x)$ 的函数图像（称为斜率场的**积分曲线**）所经之处的切线斜率都与斜率场的值相同。

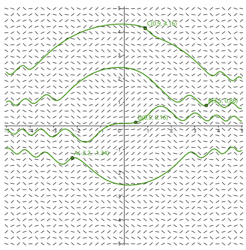
例 1. 画出以下微分方程的斜率场的大致图像，并根据斜率场的特点说明方程的解的特征。

(1) $y' = x(1-x)$, (2) $y' = \frac{y}{1+y^2}$, (3) $y' = \frac{x-y}{x+y}$, (4) $y' = \sin(x^2+y^2)$

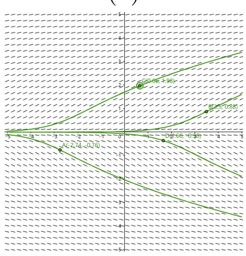
以下图像中哪些是上述方程的斜率场和积分曲线？



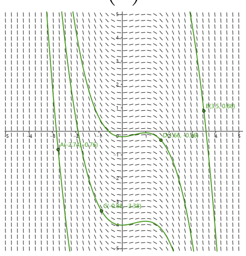
(a)



(b)



(c)



(d)

解. (1) 斜率场 $f(x)=x(1-x)$ 只与 x 有关，沿平行于 y 轴方向移动时，斜率场不变。所以积分曲线沿平行于 y 轴方向移动时仍是积分曲线，即：若 $y=y(x)$ 是微分方程的解，则 $y=y(x)+C$(C 是任意常数)都是方程的积分曲线。

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(u)\mathrm{d}u$$

是微分方程初值问题（也称为 Cauchy 问题）

$$\begin{cases} y'=f(x), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的唯一解。所以微分方程的通解是由这个特解加任意常数得到的，也就是 $f(x)$ 的不定积分。

上述斜率场图像中只有(d)满足沿 y 轴平移不变，所以(1)的斜率场图像为(d).

(2) 斜率场 $f(y)=\frac{y}{1+y^2}$ 只与 y 有关，沿平行于 x 轴方向移动时，斜率场不变。所以积分曲线沿平行于 x 轴方向移动时仍是积分曲线，即：若 $y=y(x)$ 是微分方程的解，则 $y=y(x+C)$(C 是任意常数)都是方程的积分曲线。

上述斜率场图像中只有(c)满足沿 y 轴平移不变，所以(2)的斜率场图像为(c).

(3) 斜率场 $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$ 是齐次的，即 $f(ax,ay)=f(x,y)$，沿过原点的直线方向向外伸缩时，斜率场不变。所以积分曲线在伸缩变换下仍是积分曲线，即：若 $y=y(x)$ 是微分方程的解，则 $y=\frac{1}{C}y(Cx)$(C 是任意常数)都是方程的积分曲线。

上述斜率场图像中只有(a)是关于原点为中心的伸缩下不变的，所以(3)的斜率场图像为(a).

(4) 斜率场在以原点为中心的同心圆上保持不变。上述斜率场图像中只有(a) 是关于旋转不变的，所以(4)的斜率场图像为(b). □

【一阶微分方程的求解】

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$$

是最简单的常微分方程，它的解的存在性可由微积分基本定理保证（当 f 连续时，它总有解），解的表达式可由 Newton-Leibniz 公式得到。

对复杂的微分方程，我们需要做适当变换，把它转化为最简单的微分方程的形式后求解。

例 2. 求以下微分方程的通解。

(1) $y'=x(1-x)$, (2) $y'=\frac{y}{1+y^2}$, (3) $y'=\frac{x-y}{x+y}$, (4) $y'=(x+y+3)^2$

解. (1)

$$y=\int x(1-x)\mathrm{d}x=\frac{-x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C.$$

(2) 如果视 x 为未知函数，y 为自变量，原方程写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'_x}=\frac{1+y^2}{y},$$

这是最简单的微分方程。积分得到

$$x=\int\frac{1+y^2}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{1+y^2}{2y^2}\mathrm{d}y^2=\ln|y|+\frac{y^2}{2}+C$$

这是方程的通解。当 $y>0$ 时，$x'_y>0$，所以 $x=x(y)$ 有可微的反函数 $y=y(x)$，这个反函数不是初等函数。类似地，当 $y<0$ 时，$x=x(y)$ 也有可微的反函数 $y=y(x)$.

$y=0$ 是方程的解，但不能由通解表达，这样的解叫做微分方程的**特解**。

由此可以看到，**微分方程的通解并非微分方程的全部解**。

(3)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

是**齐次方程**，即对任意非零常数 a，如果 $y=y(x)$ 是解，则 $y=ay\left(\frac{x}{a}\right)$ 也是解。

对齐次方程，记 $p=\frac{y}{x}$，$z=\ln|x|$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=\frac{1}{x}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{x\left[\frac{xy'_x-y}{x^2}\right]}=\frac{1}{y'_x-p}=\frac{1}{\frac{1-p}{1+p}-p}=\frac{1+p}{1-2p-p^2},$$

这是 (p,z) 坐标平面中的最简单的微分方程，积分得到

$$z=\frac{-1}{2}\ln\left|p^2+2p-1\right|+C,$$

所以

$$|x|=\frac{C_1}{\sqrt{p^2+2p-1}}=\frac{C_1|x|}{\sqrt{y^2+2xy-x^2}},$$

因此

$$y^2+2xy-x^2=C_2.$$

这是原方程的通解。

解法2：因为齐次方程在沿原点出发的射线的伸缩变换下不变，所以可以用极坐标系，取 $u=\ln r$，则先把原方程改写为

$$(x+y)\mathrm{d}y-(x-y)\mathrm{d}x=0,$$

再代入 $x=\mathrm{e}^u\cos\theta, y=\mathrm{e}^u\sin\theta$，得到

$$\mathrm{e}^u(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{e}^u(\sin\theta\mathrm{d}u+\cos\theta\mathrm{d}\theta)-\mathrm{e}^u(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{e}^u(\cos\theta\mathrm{d}u-\sin\theta\mathrm{d}\theta)=0,$$

化简得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta}=\frac{1+\tan 2\theta}{1-\tan 2\theta}.$$

这是 (θ,u) 坐标平面中最简单的常微分方程，积分得到

$$u=\int\frac{1+\tan 2\theta}{1-\tan 2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\ln\frac{1+\tan^2 2\theta}{(\tan 2\theta-1)^2}+C$$

于是

$$r=\mathrm{e}^u=C\frac{1}{\sqrt{|\sin 2\theta-\cos 2\theta|}},$$

即

$$2xy-x^2+y^2=C_2.$$

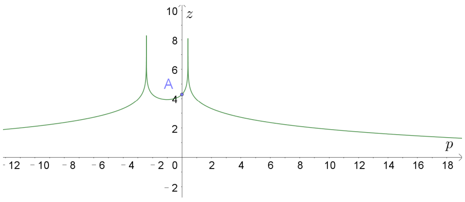


图 1: (p,z) 坐标

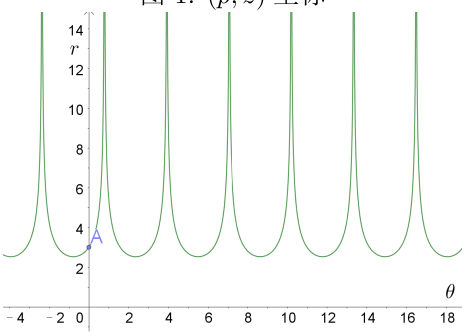


图 2: (θ,r) 坐标

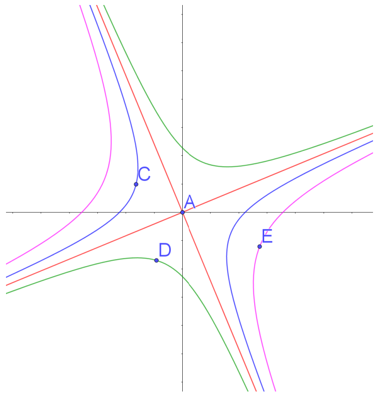


图 3: (x,y) 坐标

(4) 记 $u=x+y+3$. 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+y'_x=1+u^2,$$

所以 $x'_u=\frac{1}{1+u^2}$，因此方程通解为

$$x=\arctan u+C=\arctan(x+y+3)+C.$$

$\square$

讨论：

1. 微分方程和它的解究竟是什么？解的图形一定是函数图像吗？
   一阶微分方程 $F(x,y,y')=0$ 的解允许是由代数方程 $G(x,y)=C$ 表示的曲线，函数 G 叫做微分方程的首次积分，物理上它是一个守恒量。

2. 微分方程具有的对称性（变换下的不变性）意味着它存在某种形式的首次积分，即某种守恒量。

3. 可以利用微分方程的对称性得到求解微分方程的方法。关于这方面，感兴趣的读者可以阅读 N.H.Ibragimov 的专著《微分方程与数学物理问题》（中译本，高等教育出版社，2013年第二版）

例 3 (**齐次方程**)**.** 平面直角坐标系中，与 y 轴平行的光线经曲线 $y = y(x)$ 反射后汇聚于原点。求曲线的方程。

解. 曲线的切向量 $\mathbf{t} = (1, y'(x))$，法向量 $\mathbf{n} = (-y'(x), 1)$. 入射光方向向量 $\mathbf{a} = (0, -1)$，反射光方向向量 $\mathbf{b} = \frac{(-x, -y(x))}{\sqrt{x^2+y(x)^2}}$.

反射定律，

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{b},$$

即

$$-1 = -\frac{xy' - y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

即

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

当 $x > 0$ 时，

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

这是齐次方程。记 $p = y/x$，则

$$(\ln x)'_p = (\ln x)'_x \frac{1}{p'_x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{xy'_x - y} = \frac{1}{y'_x - p} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

于是

$$\ln x = \int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\mathrm{d}p = t + C, \quad p = \sinh t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2},$$

$$x = C_1\mathrm{e}^t, \quad \frac{C_1}{x} = \mathrm{e}^{-t},$$

所以

$$\frac{y}{x} = p = \frac{x}{2C_1} - \frac{C_1}{2x},$$

从而

$$y = \frac{x^2}{2C_1} - \frac{C_1}{2}.$$

原点是这些抛物线的焦点。 □

例 4. 求下列方程的解。

(1) $y' = \dfrac{x(y-1)}{y+xy}$ (2) $y' = \sqrt{xy}$

(3) $(1+\mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x, y(1) = 1$ (4) $(1-x)\mathrm{d}y = (1+y)\mathrm{d}x$

(5) $3x\mathrm{d}y - y(2 - x\cos x)\mathrm{d}x = 0$ (6) $(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 0$

解. 这些方程都是所谓“**可分离变量**的微分方程”，即可以写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p(x)}{q(y)}$$

的形式，也可以写成

$$p(x)\mathrm{d}x - q(y)\mathrm{d}y = 0.$$

分别取 $p(x), q(y)$ 的原函数 $P(x), Q(y)$，令 $u = P(x), v = Q(y)$，则 (u, v) 坐标平面中，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = q(y)\frac{p(x)}{q(y)}\frac{1}{p(x)} = 1,$$

于是解得 $v = u + C$，即 $Q(y) = P(x) + C$.

(1) $(y-1)(x+1)\mathrm{e}^{y-x} = C$；

(2) $y = \left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\right)^2$；

(3) $y = \sqrt{2\ln(1+\mathrm{e}^x) + 1 - 2\ln(1+\mathrm{e})}$；

(4) $(1+y)(1-x) = C$；

(5) $y = Cx^{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-\sin x}$；

(6) $(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^y-1) = C$.

□

【一阶微分式形式的微分方程与平面向量场的正交曲线族】

一阶微分式形式的微分方程

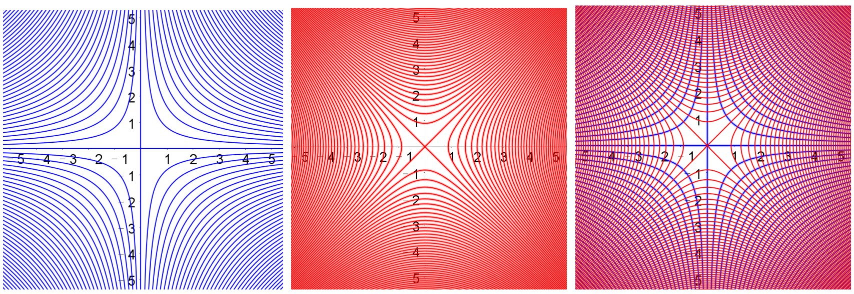
$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

是一阶常微分方程的一种表达形式，其中 x, y 的地位是对等的，不再强调谁是自变量，谁是因变量。(x, y) 坐标平面中的曲线 $\gamma : (x(t), y(t))$ 是它的积分曲线，当且仅当

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0. \qquad (*)$$

在直角坐标系中，$(P(x,y), Q(x,y))$ 是点 (x, y) 处的一个向量，这给出平面上的一个**向量场**。γ 是方程(*)的积分曲线，当且仅当它在其所经之处总是与向量场 (P, Q) 正交。所以上述微分方程的通解就是向量场 (P, Q) 的正交曲线族。

例 5. 求曲线族 $xy = C$ 的正交曲线族。



解. 对 $xy = C$ 求微分得到这族曲线满足的微分方程

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0.$$

由此得到该曲线族的正交向量场为 $(-x,y)$。于是正交曲线族满足微分方程

$$-x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0,$$

由它解得

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

□

二、一阶线性方程

【一阶线性齐次方程】

$$y' + a(x)y = 0.$$

利用分离变量求解，也可以直接凑：

$$\mathrm{e}^{A(x)}(y' + a(x)y) = \left(\mathrm{e}^{A(x)}y(x)\right)' = 0,$$

其中 $A'(x) = a(x)$.

由此得到

$$\mathrm{e}^{A(x)}y(x) = C,$$

即

$$y(x) = C\mathrm{e}^{A(x)}.$$

【一阶线性非齐次方程】

$$y' + a(x)y = f(x),$$
$$\left(\mathrm{e}^{A(x)}y(x)\right)' = \mathrm{e}^{A(x)}f(x),$$

于是

$$\mathrm{e}^{A(x)}y(x) = \int \mathrm{e}^{A(x)}f(x)\mathrm{d}x$$

从而

$$y(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}\int \mathrm{e}^{A(x)}f(x)\mathrm{d}x,$$

但这个写法容易引起混淆，所以我们把它写成变上限的定积分形式

$$y(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}\left[C_0 + \int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{A(t)}f(t)\mathrm{d}x\right] = \boxed{\mathrm{e}^{-A(x)}C_0} + \boxed{\mathrm{e}^{-A(x)}\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{A(t)}f(t)\mathrm{d}x},$$

最后的两个求和项分别是齐次方程通解，以及非齐次方程的一个特解。

【解的存在性与唯一性】

由上述讨论知：若 $a(x), f(x)$ 都是连续函数，则对任意 (x_0, y_0)，一阶线性方程 $y' + a(x)y = f(x)$ 有唯一解满足初始条件 $y(x_0) = y_0$.

【线性叠加原理】

若 y_1, y_2 分别是线性方程 $Ly = f_1$ 和 $Ly = f_2$ 的解，则 $\alpha y_1 + \beta y_2$ 是方程 $Ly = \alpha f_1 + \beta f_2$ 的解。

推论：

(1) $Ly=0$ 的解空间是一个线性空间，

(2) $Ly=f$ 的解空间是一个基于线性空间 $L^{-1}(0)$ 的仿射空间，即非齐次方程通解是齐次方程通解与非齐次方程的一个特解的和，

(3) 可以根据非齐次项的分解 $f=\alpha f_1+\cdots+\alpha_k f_k$，把 $Ly=f$ 的特解分解为 $Ly=f_k$ 的特解的线性组合。

例 6. 证明一阶线性方程 $xy'-\left(2x^2+1\right)y=x^2(x>0)$ 有且仅有一个解 $y^*(x)$ 当 $x\to+\infty$ 存在有限极限。写出解 $y^*(x)$ 的表达式，并求这个极限。

解.

$$y'-\left(2x+\frac{1}{x}\right)y=x$$

齐次方程

$$y'-\left(2x+\frac{1}{x}\right)y=0$$

的通解为

$$y=Cx\mathrm{e}^{x^2}.$$

常数变易法：设 $y(x)=C(x)x\mathrm{e}^{x^2}$ 是原非齐次方程的解，则

$$C'(x)x\mathrm{e}^{x^2}=x,$$

从而

$$C(x)=C_0+\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

所以

$$y(x)=x\mathrm{e}^{x^2}\left[C_0+\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right].$$

注意到 $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 收敛，而 $x\mathrm{e}^{x^2}\to+\infty$（$x\to+\infty$），所以$y(x)$ 有界仅当

$$C_0=-\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

考虑

$$y^*(x)=x\mathrm{e}^{x^2}\left[\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right],$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}y^*(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-x^2}}=\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\left[-\frac{1}{x^2}-2\right]\mathrm{e}^{-x^2}}=-\frac{1}{2}.$$

□

例 7. 设 $f(x)$ 是连续的周期函数，周期为 $T>0$. 对方程

$$y'-\lambda y=f(x)$$

讨论：(1) 有界解的个数；(2) T-周期解的个数。

证明. (1) 易知齐次方程通解为 $C\mathrm{e}^{\lambda x}$. 用常数变易法，设 $y(x)=C\mathrm{e}^{\lambda x}$ 是非齐次方程的解。则

$$C'(x)\mathrm{e}^{\lambda x}=f(x),$$

从而

$$C(x)=C_0+\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\mathrm{d}t.$$

因此

$$y(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[C_0+\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\mathrm{d}t\right]=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[\frac{y(x_0)}{\mathrm{e}^{\lambda x_0}}+\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\mathrm{d}t\right]$$

所以

$$\begin{aligned}y(x_0+T)&=\mathrm{e}^{\lambda T}\left[y(x_0)+\mathrm{e}^{\lambda x_0}\int_{x_0}^{x_0+T}\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\mathrm{e}^{\lambda T}y(x_0)+\int_0^T\mathrm{e}^{-\lambda s}f(x_0+s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

取 $a_n=y(nT)$，则

$$a_{n+1}=\mathrm{e}^{\lambda T}a_n+\int_0^T\mathrm{e}^{-\lambda s}f(s)\mathrm{d}s.$$

当 $\lambda=0$ 时，$a_n=y(0)+n\int_0^T f(s)\mathrm{d}s$. 因此，$\{a_n\}$ 有界当且仅当 $\int_0^T f(s)\mathrm{d}s=0$，这与 $y(0)$ 无关。从而，要么对所有 $y(0)$，$\{a_n\}$ 有界，要么对所有 $y(0)$，$\{a_n\}$ 无界。

当 $\lambda\neq 0$ 时，

$$a_{n+1}+\beta=\mathrm{e}^{\lambda T}(a_n+\beta),$$

其中

$$\beta=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\lambda T}}\int_0^T\mathrm{e}^{-\lambda s}f(s)\mathrm{d}s.$$

从而

$$a_n+\beta=\mathrm{e}^{n\lambda T}(a_0+\beta)=\mathrm{e}^{n\lambda T}(y(0)+\beta).$$

a_n 有界当且仅当 $y(0)=-\beta=\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda T}-1}\int_0^T\mathrm{e}^{-\lambda s}f(s)\mathrm{d}s$.

(2) 由(1)的讨论知，当 $\lambda=0=\int_0^T f(s)\mathrm{d}s$ 时，所有解都是 T 周期的。当 $\lambda=0\neq\int_0^T f(s)\mathrm{d}s$，所有解都不是周期的。

当 $\lambda\neq 0$ 时，$y(x)$ 是 T 周期解当且仅当 $y(0)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda T}-1}\int_0^T\mathrm{e}^{-\lambda s}f(s)\mathrm{d}s$. □

例 8 (**Gronwall 不等式**). 设 φ,ψ 是非负的连续函数，η 是可微函数，η' 是 Riemann 可积函数，且

$$\eta'(t)\leq\varphi(t)\eta(t)+\psi(t).$$

证明对任意 $t>0$，

$$\eta(t)\leq\mathrm{e}^{\int_0^t\varphi(s)\mathrm{d}s}\left[\eta(0)+\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}s\right].$$

证明. 考虑

$$F(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s}\eta(t).$$

则

$$F'(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s}(\eta'(t) - \varphi(t)\eta(t)) \le \mathrm{e}^{-\int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s}\psi(t),$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s}\eta(t) = F(t) &= F(0) + \int_0^t F'(s)\mathrm{d}s \\
&\le \eta(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau}\psi(s)\mathrm{d}s \\
&\le \eta(0) + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

因此

$$\eta(t) \le \mathrm{e}^{\int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s\right].$$

□

【具有拟多项式非齐次项的常系数线性微分方程】

形如 $\mathrm{e}^{\alpha x}P(x)$ 的函数称为 **拟多项式**。

$$\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^n}{n!}\right)' = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \alpha\frac{x^n}{n!}\right),$$

例 9. 记 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 是所有形如形如 $\mathrm{e}^{\alpha x}P(x)$（其中 P 是次数不超过 n 的多项式）的拟多项式组成的线性空间。证明：

(1) 对 $\lambda \in \mathbb{R}$，若 $\alpha \neq \lambda$，则对任意 $f \in \mathscr{P}_{\alpha,n}$，$y' - \lambda y = f$ 在 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 中有唯一解。

(2) 对任意 $f \in \mathscr{P}_{\lambda,n}$，$y' - \lambda y = f$ 在 $\mathscr{P}_{\lambda,n+1}$ 中有无穷多解，这些解彼此相差 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的一个常数倍数。

证明. (1) 记 $Ly = y' - \lambda y$. 则

$$L\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^k}{k!}\right) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left((\alpha-\lambda)\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right),$$

所以 L 是 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 到自身的线性运算，在 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 的基底

$$\mathrm{e}^{\alpha x}, \mathrm{e}^{\alpha x}x, \mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^2}{2}, \ldots, \mathrm{e}^{\alpha x}\frac{x^n}{n!}$$

下，L 的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix}
\alpha-\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \alpha-\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha-\lambda & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\lambda & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha-\lambda
\end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

当 $\alpha \neq \lambda$ 时，它是可逆矩阵，从而 L 是 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 到自身的可逆线性变换。

(2) 当 $\alpha = \lambda$ 时， $L: \mathscr{P}_{\lambda,n+1} \to \mathscr{P}_{\lambda,n}$ 的矩阵表示为 $(0, I_{n+1})_{(n+1)\times(n+2)}$. 所以 L 是满射，但 L 不是单射，所以对任意 $f \in \mathscr{P}_{\lambda,n}$，$y' - \lambda y = f$ 在 $\mathscr{P}_{\lambda,n+1}$ 中有无穷多解，这些解彼此相差一个常数。 □

例 10. (1) $y' - 2y = \mathrm{e}^x x^2$；　(2) $y' + y = \sin x$；　(3) $y' - y = \mathrm{e}^x x$.

解. (1) 根据上例知

$$\begin{aligned} L(\mathrm{e}^x) &= -\mathrm{e}^x, \\ L(\mathrm{e}^x x) &= \mathrm{e}^x(x + 1 - 2x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x x, \\ L(\mathrm{e}^x x^2) &= \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - 2x^2) = 2\mathrm{e}^x x - \mathrm{e}^x x^2, \end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{e}^x x^2 = -L(\mathrm{e}^x x^2) - 2L(\mathrm{e}^x x) - 2L(\mathrm{e}^x) = L(\mathrm{e}^x(-x^2 - 2x - 2)).$$

这样求得特解 $\mathrm{e}^x(-x^2 - 2x - 2)$.

齐次方程通解为 $y = \mathrm{e}^{2x}$，所以非齐次方程通解为

$$y(x) = C\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x(x^2 + 2x + 2).$$

(2)

$$\begin{aligned} L(\sin x) &= \cos x + \sin x, \\ L(\cos x) &= -\sin x + \cos x, \end{aligned}$$

所以 $\sin x = L\left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right)$，得到特解 $\frac{\sin x - \cos x}{2}$. 再由齐次方程通解为 $C\mathrm{e}^{-x}$ 知非齐次方程通解为

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + \frac{\sin x - \cos x}{2}.$$

(3)

$$\begin{aligned} L(\mathrm{e}^x x) &= \mathrm{e}^x(x + 1 - x) = \mathrm{e}^x, \\ L(\mathrm{e}^x x^2) &= \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - x^2) = 2\mathrm{e}^x x, \end{aligned}$$

所以 $\mathrm{e}^x \frac{x^2}{2}$ 是特解，非齐次方程通解为

$$y(x) = C\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \frac{x^2}{2}.$$

□

三、可线性化的一阶非线性微分方程

例 11. (1) $y' + 2xy = 2x^3 y^2$；(2) $y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$

解. (1) 这是 Bernoulli 方程，两边除以 $-y^2$，得到

$$\left(\frac{1}{y}\right)' - \frac{2x}{y} = -2x^3$$

这是关于 $1/y$ 的线性方程，解得

$$\frac{1}{y} = C\mathrm{e}^{x^2} + x^2 + 1.$$

从而原方程通解为

$$y = \frac{1}{C\mathrm{e}^{x^2} + x^2 + 1}.$$

$y = 0$ 是原方程的解，但它不能用上述通解形式来表示。但把通解改写成

$$y = \frac{C}{\mathrm{e}^{x^2} + C(x^2+1)},$$

则 $y = 0$ 相当于这里 $C = 0$ 的情形。

(2) 这是 Ricatti 方程的特殊情况。令 $z = \frac{1}{y}$. 则

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -a - \frac{b}{x^2 y^2} = -a - \frac{bz^2}{x^2},$$

这是一个齐次方程。令 $p = \frac{z}{x}$，$u = \ln|x|$，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{x\frac{xz'_x - z}{x^2}} = \frac{1}{z'_x - p} = \frac{1}{-a - bp^2 - p},$$

积分得到 $u = u(p)$，从而

$$x = C\mathrm{e}^{\int u(p)\mathrm{d}p} = CU(p) = CU\left(\frac{1}{xy}\right).$$

$\square$