习题讨论课11题目：广义积分

★号（越）多表示题目（越）难

一、广义积分的定义与计算

【定义】 设 $\omega\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，$-\infty<a<\omega$，$f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ 满足

- f 在任何有界闭区间 $[a,A]\subset[a,\omega)$ 上都 Riemann 可积；
- $\lim\limits_{A\to\omega^-}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；
- $\omega=+\infty$ 或 f 在 $[a,\omega)$ 上无界。

则称 $\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x$ 为收敛的广义积分，且记 $\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to\omega^-}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x.$

当 ω 为实数时，又称 $\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x$ 为瑕积分，称 ω 为 f 的瑕点。

【性质与计算】

- 线性：收敛+积分等式
- 保序：收敛的前提下
- Newton-Leibniz：若存在原函数 F 且 $\lim\limits_{x\to\omega^-}F(x)$ 存在，则 $\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to\omega}F(x)-F(a).$
- 换元：$\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$，其中 $\varphi:[\alpha,\beta)\to[a,\omega)$ 单调 $\mathscr{C}^1$. 等式中任意一侧积分收敛蕴涵另一侧积分收敛。
- 分部积分：三个极限中，两个极限存在蕴涵第三个极限存在

【一些标准的例子】

$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x(\lambda>0)$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x(p>1)$, $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x(p>1)$，$\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^p}\mathrm{d}x(p>1)$，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$, $\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x.$

换元转化：

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\overset{x=e^t}{=}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{pt}}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(p-1)t}\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\overset{x=e^{-t}}{=}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{-pt}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1-p)t}\mathrm{d}t.$$

$$\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^p}\mathrm{d}x\overset{t=\ln\ln x}{=}\int_{\ln\ln 10}^{+\infty}\frac{1}{t^p}\mathrm{d}t.$$

例 1. 设 $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ 单调，在 $x\to 0^+$ 时无界，在任何区间 $[\delta,1]$（$\delta>0$）上有界，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。证明

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

讨论：

1. 如果 Riemann 积分的定义是否可以改为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)?$$

对 Dirichlet 函数 $D(x)$，按上述定义，会得到

$$\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x=1,$$

但是对任意大于 1 的无理数 b，会得到

$$\int_0^b D(x)\mathrm{d}x=0.$$

此时 $\int_0^x D(t)\mathrm{d}t$ 对积分限 x 是处处间断的。

2. 如果上题中改为任意划分 $P:0=x_1<x_2<\ldots<x_n=1$，是否成立

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)(x_k-x_{k-1})?$$

是否可以对 Riemann 积分改用上述方式定义？

3. 在上题条件下，如果仍采用等分，但任意取标志点，是否成立

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)?$$

对 Riemann 积分是否可用等分+任意标志点的方式定义？

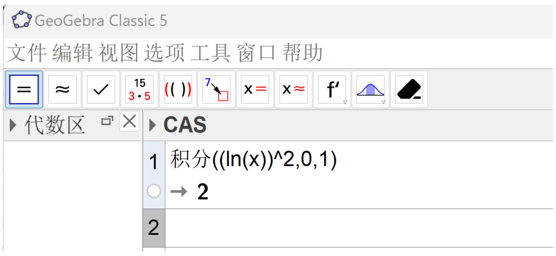
4. 如果没有单调性假设，上题结论是否成立？事实上，只要 f 在 $x=0$ 的一个邻域中具有单调性即可，在区间 $[\delta,1]$ 中要求 f Riemann 可积（在原题中单调性保证了这个 Riemann 性）。

5. 对无界区间上的广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，你能给出类似的近似计算的办法并证明吗？

例 2. 计算说明以下广义积分收敛，并求它们的值。

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$ (3) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^3}}$

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ (5) $\displaystyle\int_0^1(\ln x)^2\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2+x)\sqrt{x-1}}$



这些留给学生作为不定积分的练习，请用软件检查计算结果。

例 3 (★). 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \sin x \mathrm{d}x$.

例 4. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x$.

例 5 (★★). 设 f 连续，$f(+\infty) = A \in \mathbb{R}$，$0 < \alpha < \beta$. 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} \mathrm{d}x.$$

二、广义积分收敛性的判别

【判别法】

1. 为什么需要收敛的判别法？

2. 核心判别法：Cauchy 收敛准则，这是充分必要条件，既可判定收敛，也可判定发散

3. 绝对收敛：比较法，可判定收敛，也可用于判定发散（用逆否命题）；涉及概念：
   大 O：$f(x) = O(g(x))$，$x \to \omega$，在 ω 的去心邻域中，$|f(x)| \le M|g(x)|$.
   大 Θ：同阶，$f(x) = \Theta(g(x))$，$x \to \omega$，当且仅当 $f(x) = O(g(x))$ 且 $g(x) = O(f(x))$.

4. 条件收敛：比较法失效，Dirichlet-Abel 判别法

例 6 (★). 设 f 是非负函数，在任何有界闭区间内有界且 Riemann 可积，$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。
(1) 是否必然成立 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?
(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，是否成立 $A = 0$?
(3) 若 f 单调，是否成立 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?
(4) 若 f 单调，是否成立 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$?

例 7. 讨论 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d}x$ 的收敛性。

例 8. 判断下列积分的敛散性。

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$; (3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x}\,\mathrm{d}x$; (5) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^{-1}}-1}{x^p \ln(1+x^{-2})}\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{1}{x-\sin x}\,\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x$; (9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^n}\,\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}\,\mathrm{d}x$; (11) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$; (12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

注：利用渐近展开，特别是 Taylor 展开，找到函数在关键点处的主项是用比较法判别（绝对）收敛时的重要途径。

例 9. 讨论下列积分的收敛性。

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\cos(x^3)\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\left(\arctan\frac{2}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p\sin(x^q)\,\mathrm{d}x$

注：Dirichlet-Abel 判别法本质上也是用分部积分得到的。