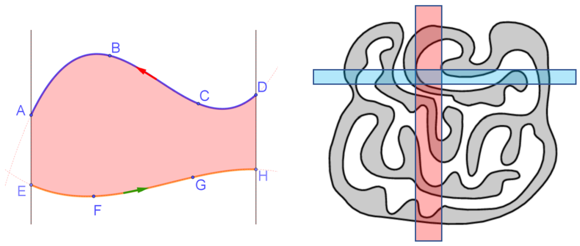
# 习题讨论课10答案：定积分的应用，广义积分的定义与计算

★号（越）多表示题目（越）难

## 一、定积分应用

**【平面区域的面积】**




(1) 函数图像围成的有界区域

$$\int_{x_{左}}^{x_{右}} y_{上}(x)\mathrm{d}x - \int_{x_{左}}^{x_{右}} y_{下}(x)\mathrm{d}x$$

(2) 简单封闭的参数曲线围成的有界区域

$$-\int_{\gamma} y\mathrm{d}x = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)\mathrm{d}t,$$

把上图中间图形分割为一些形如左边图形的小块，然后把它们的面积累加起来，再用积分换元变成对曲线参数的积分。类似可得

$$\int_{\gamma} x\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)\mathrm{d}t,$$

这也可以用分部积分得到。将上述两个等式组合得到

$$\frac{1}{2}\int_{\gamma} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \begin{vmatrix} x(t) & x'(t) \\ y(t) & y'(t) \end{vmatrix} \mathrm{d}t.$$

上述积分是有向积分，曲线 $\gamma$ 的参数增加方向需要满足区域的自然正向：即在区域边界按参数增加方向前进时，区域位于左手一侧。

(3) 平面极坐标下，

$$\frac{1}{2}\int_{\gamma} r^2\mathrm{d}\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}r(t)^2\theta'(t)\mathrm{d}t = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}r(\theta)^2\mathrm{d}\theta.$$

在(2)中第3个公式中代入 $x(t) = r(t)\cos\theta(t), y(t) = r(t)\sin\theta(t)$.

$\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$ 是无穷小扇形的面积。

**【曲线的弧长与曲线的曲率】**

正则曲线 $\mathbf{x}(t) \in \mathscr{C}^1([\alpha,\beta];\mathbb{R}^n)$，$\mathbf{x}'(t) \neq 0$. 弧长 $L = \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{x}'(t)\|\mathrm{d}t$.

(1) 空间直角坐标系下

$$L=\int_\gamma \mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta \sqrt{x_1'(t)^2+\cdots+x_n'(t)^2}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}l=\sqrt{\mathrm{d}x_1^2+\cdots+\mathrm{d}x_n^2}$$

(2) 平面极坐标系下，$x=r(t)\cos\theta(t)$，$y=r(t)\sin\theta(t)$

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta \sqrt{r'(t)^2+r\theta'(t)^2}\mathrm{d}t$$

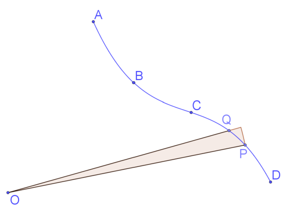
$$\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}r)^2+(r\mathrm{d}\theta)^2}$$

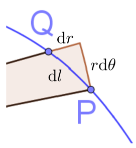
(3) 空间柱坐标系下，$x=r(t)\cos\theta(t), y=r(t)\sin\theta(t), z(t)$，

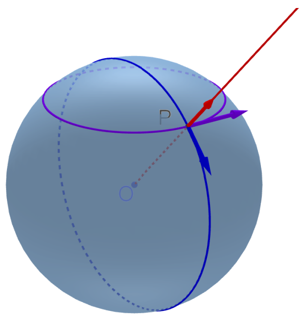
$$\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}r)^2+(r\mathrm{d}\theta)^2+(\mathrm{d}z)^2}$$

(4) 空间球坐标系下，$x=r(t)\cos\varphi(t)\sin\theta(t), y=r(t)\sin\varphi(t)\sin\theta(t), z=r(t)\cos\theta(t)$，

$$\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{r'(t)^2+[r(t)\sin\theta(t)]^2\varphi'(t)^2+r(t)^2\theta'(t)^2}\mathrm{d}t$$




正则曲线的弧长参数

$$l(t)=\int_\alpha^t \|\mathbf{x}'(t)\|\mathrm{d}t$$

于是

$$l'(t)=\|\mathbf{x}'(t)\|>0.$$

弧长参数下的曲线方程 $\tilde{\mathbf{x}}(l)=\mathbf{x}(t(l))$，

$$\tilde{\mathbf{x}}'(l)=\frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|},\quad \|\tilde{\mathbf{x}}'(l)\|=1,\quad \langle\tilde{\mathbf{x}}'(l),\tilde{\mathbf{x}}''(l)\rangle=0.$$

单位速率，加速度与速度正交，是曲线的主法向量。曲率

$$\kappa=\|\tilde{\mathbf{x}}''(l)\|.$$

**【旋转体与旋转面】**

平面封闭曲线 $(x(t),y(t))$ 位于 $x$ 轴的一侧，它绕 $x$ 轴旋转一周得到曲面 $\Sigma$ 和旋转体 $\Omega$。

旋转面面积（旋转体侧面积）

$$A=\int_\gamma 2\pi y \mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

曲线方向与旋转方向垂直，$2\pi y$ 是旋转半径为 $y$ 时圆周的周长，$\mathrm{d}l$ 是曲线的微弧长。$2\pi y\mathrm{d}l$ 是底面半径为 $y$、母线长度为 $\mathrm{d}l$ 的圆台的面积（近似值）。

旋转体体积

$$V=-\int_\gamma \pi y^2\mathrm{d}x=-\int_\alpha^\beta \pi y(t)^2x'(t)\mathrm{d}t.$$

上述积分中的符号来自于曲线定向。$\pi y^2\mathrm{d}x$ 是底面半径为 $y$ 高为 $\mathrm{d}x$ 的圆柱体积。

一般原理：沿一个方向把 $\Omega$ 切割成与 $x$ 轴垂直的一系列薄片（近似为柱体），截面面积为 $A(x)$ ，薄片厚度为 $\mathrm{d}x$，薄片体积 $\mathrm{d}V(x)=A(x)\mathrm{d}x$，$\Omega$ 的体积为

$$V=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}V(x)=\int_\alpha^\beta A(x)\mathrm{d}x$$

曲面面积的计算是一个很微妙的问题，我们将在多元微积分时有更深入的（但仍是初等的）讨论。

**【质心】**

质心是几何体中的点按质量分布做加权平均得到的平均位置。

**【习题】**

**例 1.** 摆线方程为 $x(t)=R(t-\sin t),y(t)=R(1-\cos t)$，$0\le t\le 2\pi$. 求

(1) 摆线的弧长；

(2) 摆线与 $x$ 轴所围成的有界区域的面积；

(3) 摆线绕 $x$ 轴旋转一周所围成的空间有界区域的体积；

(4) 摆线绕 $x$ 轴旋转一周所形成的旋转面的面积；

(5) 摆线与 $x$ 轴所围成的平面有界区域绕它的对称轴一周所形成的空间有界区域的体积；

(6) 摆线绕它的对称轴旋转一周所形成的旋转面的面积。

**解.** (1)

$$\mathrm{d}l=\sqrt{R^2(1-\cos t)^2+R^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=\sqrt{2}R\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t=2R\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t.$$

$$L=\int_0^{2\pi}2R\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8R.$$

(2)

$$x'(t) = R(1-\cos t) > 0,$$

$$\int_0^{2\pi} y(t)\mathrm{d}x(t) = R^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t = R^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t = 3\pi R^2.$$

(3)

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{2\pi}\pi y(t)^2\mathrm{d}x(t) = R^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t\\&= R^3\int_0^{2\pi} 1-3\cos t+3\frac{\cos 2t+1}{2}-\frac{\cos 2t+1}{2}\cos t\mathrm{d}t\\&= 5\pi R^3.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi}2\pi y(t)\mathrm{d}l = 4\pi R^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t\\&= 4\pi R^2\int_0^{2\pi}\left(2\cos^2\frac{t}{2}-2\right)\mathrm{d}\cos\frac{t}{2}\\&= \frac{64\pi}{3}R^2.\end{aligned}$$

(5) 对称轴为 $x = R\pi$：

$$y(\pi\pm t) = R(1-\cos(\pi\pm t)) = R(1+\cos(\pm t)) = R(1+\cos t),$$

$$\frac{x(\pi+t)+x(\pi-t)}{2} = \frac{R(\pi+t-\sin(\pi+t))+R(\pi-t-\sin(\pi-t))}{2} = R\pi.$$

当 $0\le t\le\pi$ 时，$y'(t) = R\sin t > 0$，

$$V = \int_0^{\pi}\pi(x(t)-R\pi)^2\mathrm{d}y(t) = R^3\pi\int_0^{\pi}(t-\sin t-\pi)^2\sin t\mathrm{d}t = \frac{9\pi^3-16\pi}{6}R^3.$$

(6)

$$A = \int_0^{\pi}2\pi(\pi-x(t))\mathrm{d}l = 2R^2\pi\int_0^{\pi}(\pi-t+\sin t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{12\pi^2-16\pi}{3}R^2.$$

□

**例 2.** 设 $\gamma$ 是双纽线在右半平面中的一支，其极坐标方程为 $r^2 = a^2\cos 2\theta$，$-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$. 求

(1) 该曲线的弧长；

(2) 该曲线所围成的有界区域的面积；

(3) 该曲线绕 $x$ 轴旋转一周所围成的空间有界区域的体积；

(4) 该曲线绕 $x$ 轴旋转一周所形成的旋转面的面积；

(5) 该曲线所围成的平面有界区域绕 $y$ 轴一周所形成的空间有界区域的体积；

(6) 该曲线绕 $y$ 轴旋转一周所形成的旋转面的面积。

**解.** (1)

$$2r\mathrm{d}r = -2a^2\sin 2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}r)^2+(r\mathrm{d}\theta)^2} = \sqrt{\frac{a^4\sin^2 2\theta}{a^2\cos 2\theta}+a^2\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$L = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = a\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2a\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

这是一个收敛的瑕积分，且涉及椭圆函数。

(2)

$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r(\theta)^2\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2}{2}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta = a^2.$$

(3) 当 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ 时，$y(\theta)=r(\theta)\cos\theta>0$，

$$\begin{aligned}x'(\theta) = (r(\theta)\cos\theta)' &= -\frac{a^2\sin 2\theta}{r}\cos\theta - r\sin\theta\\ &= \frac{-a^2\sin 3\theta}{r}<0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= -\int_0^{\frac{\theta}{4}}\pi y(\theta)^2\mathrm{d}x(\theta) = \pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\sin^2\theta\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta\\ &= -\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\frac{\cos 2\theta - 2\cos 2\theta + 1}{2}\mathrm{d}\cos\theta\\ &= \pi a^2\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}-1)\right].\end{aligned}$$

提示

$$\begin{aligned}\int(\cos 2\theta)^\alpha\mathrm{d}\cos\theta &= \cos\theta(\cos 2\theta)^\alpha + 2\alpha\int\cos\theta(\cos 2\theta)^{\alpha-1}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\\ &= \cos\theta(\cos 2\theta)^\alpha - 2\alpha\int(\cos 2\theta+1)(\cos 2\theta)^{\alpha-1}\mathrm{d}\cos\theta.\end{aligned}$$

(4)

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}}2\pi y(\theta)\mathrm{d}l = \int_0^{\frac{\pi}{4}}2\pi a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = 2\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(5)

$$V_y = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi x(\theta)^2\mathrm{d}y(\theta) = \frac{\sqrt{2}\pi^2a^2}{8}$$

(6)

$$A_y = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\pi x(\theta)\mathrm{d}l = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = 2\sqrt{2}\pi a^2.$$

□

**例 3** (**Pappus-Guldin 定理**). (1) 设平面曲线 $\gamma$ 上质量均匀分布. 则 $\gamma$ 绕 $x$ 轴旋转所得到曲面 $\Sigma$ 的面积等于 $\gamma$ 质心绕 $x$ 轴旋转得到的周长乘以曲线 $\gamma$ 的长度;
(2) 设平面封闭曲线 $\gamma$ 所围成的平面区域 $D$ 上质量均匀分布。则 $D$ 绕 $x$ 轴旋转得到的空间区域 $\Omega$的体积等于 $D$ 质心绕 $x$ 轴旋转得到的周长乘以区域 $D$ 的面积。

**证明.** (1)

$$2\pi\bar{y} = \frac{\int_\gamma 2\pi y \mathrm{d}l}{\int_\gamma \mathrm{d}l} = \frac{A_\Sigma}{L_\gamma}.$$

(2)

$$2\pi\bar{y} = \frac{\int_\gamma x \mathrm{d}(\pi y^2)}{\int_\gamma x \mathrm{d}y} = \frac{V_\Omega}{A_D}.$$

□

**例 4.** (1) 求质量均匀分布的摆线 $x = R(t - \sin t), y = R(1 - \cos t)(0 \le t \le 2\pi)$ 的质心。
(2) 摆线与 $x$ 轴围成的平面区域上质量均匀分布，求该区域的质心。
(3) 设 $\gamma$ 为双纽线在右半平面的一支，其上质量均匀分布，求其质心。
(4) 设 $D$ 为双纽线在右半平面的一支所围的有界区域，其上质量均匀分布，求其质心。

**证明.** 利用例1、例2、例3的结论。 □

**例 5.** 若 $\mathscr{C}^2$ 正则的平面曲线 $\gamma$ 的曲率为非零常数，证明它是一段圆弧。

**证明.** 曲线弧长参数下，$\|\mathbf{x}'(l)\| = 1$，$\|\mathbf{x}''(l)\| = \kappa$ 是曲率，为常数。不妨设

$$\mathbf{x}'(l) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(l)}.$$

则

$$\mathbf{x}''(l) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(l)}\theta'(l),$$

从而 $\kappa = |\theta'(l)|$. 于是 $\theta'(l) = \kappa$ 或 $\theta'(l) = -\kappa$，且由于导函数满足介值性质，上述两种情形必有一种情形恒成立，不妨设第一种恒成立. 于是

$$\theta(l) = \theta(0) + \kappa l,$$

从而

$$\mathbf{x}'(l) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta(0)+\kappa l\right)},$$

因此

$$\mathbf{x}(l) = \mathbf{x}(0) + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta(0)+\kappa l\right)}}{\mathrm{i}\kappa},$$

从而

$$|\mathbf{x}(l)-\mathbf{x}(0)|=\frac{1}{\kappa}.$$

□

**二、广义积分的概念与计算**

广义积分是 Riemann 积分的推广，它通过对 Riemann 积分的积分限取极限得到，适用于无界区间上函数的积分或者无界函数的积分。Newton-Leibniz 公式的推广形式可用于计算收敛的广义积分。

**例 6.** 设 $\gamma$ 为曲线 $x^3+y^3=3xy$. 求
(1) $\gamma$ 在第一象限所围成的有界区域的面积；
(2) $\gamma$ 与它的渐近线所围成的平面区域的面积。

**解.** 曲线参数方程

$$x=\frac{3t}{1+t^3},\quad y=\frac{3t^2}{1+t^3},\quad t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}.$$

(1) $x,y\geq 0$ 当且仅当 $0\leq t<+\infty$.

$$x'(t)=\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\begin{cases}>0, & 0\leq t<\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\\ <0, & t>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.\end{cases},$$

$$\begin{aligned}A_1&=-\int_0^{+\infty}y(t)\mathrm{d}x(t)=-\int_0^{+\infty}\frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\mathrm{d}t\\&=-\int_1^{+\infty}\frac{3(1-2(s-1))}{s^3}\mathrm{d}s\quad s=1+t^3\\&=\left.\frac{9}{2s^2}-\frac{6}{s}\right|_1^{+\infty}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(2) 渐近线 $y=-x-1$，

$$\begin{aligned}A_2&=\int_{-\infty}^{-1}[y(t)+x(t)+1]\mathrm{d}x(t)+\int_{-1}^{0}[y(t)+x(t)+1]\mathrm{d}x(t)\\&=\int_{-\infty}^{-1}\frac{3(1-2t^3)}{(1-t+t^2)^3}\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}\frac{3(1-2t^3)}{(1-t+t^2)^3}\mathrm{d}t\\&=\left.\frac{6t^2+3}{2\left(t^2-t+1\right)^2}\right|_{-\infty}^{0}\\&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

□

**注：**求解(2)中的有理函数的不定积分可以用奥斯特洛格拉德斯基方法，感兴趣的读者可以阅读菲赫金戈尔茨《微积分学教程》（第二卷）第八章第276小节。