习题讨论课09题目：定积分的性质与计算

★号（越）多表示题目（越）难

一、函数的可积性

在有界闭区间 $[a,b]$ 上，

$$
\begin{aligned}
f \text{ Riemann 可积} &\iff f \text{ Darboux 可积} \\
&\iff (\text{Lebesgue 准则}) f \text{ 有界且 } f \text{ 的间断点集是零测集。}
\end{aligned}
$$

三个判断办法中，Riemann 和 Darboux 的定义为积分提供了几何背景、收敛的含义以及（近似）计算的方法，但是作为可积性的判别方法，Lebesgue 准则最简单。

例 1. 在有界闭区间上，以下哪些函数可积？

可积 (1) 连续函数

可积 (2) 单调函数

可积 (3) $g(x)$ 是有界函数，$f(x) = \sup\limits_{a \le t \le x} g(t)$.

可积 (4) $f+g, fg$，其中 $f,g \in \mathscr{R}[a,b]$.

可积 (5) $1/f$，其中 $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 是恒不为零的函数。

不一定可积 (6) $g(f(x))$，其中 f,g 可积。 f（x）是Riemann函数，g（x）= 1，除了在0处为0。复合后为Dirichlet函数，不可积

不可积 (7) Dirichlet 函数

可积 (8) Riemann 函数

可积 (9) $f \in \mathscr{R}[a,b]$ 在子区间 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ 上

二、定积分的近似计算

包括用 Riemann 和或 Darboux 和近似积分，或者用积分来估算一些Riemann和形式的数列；用积分保序性对被积函数放缩；改进的数值逼近方法。

例 2. 证明对充分大的正整数 n，

$$0.75n < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}} + \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{3}{n}} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}} + 1 < 0.85n$$

例 3. 设 $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 连续且严格增，$f(0)=0$，f^{-1} 是其反函数。证明对任意 $a \in [0,+\infty)$ 以及任意 $b \in f([0,+\infty))$，

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y \ge ab.$$

其中等号成立当且仅当 $b = f(a)$.

例 4. 设 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 是凸函数。证明 f 可积，且

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

例 5. 设 f 有足够的可微性。对充分小的 h，分别用

$$F_1(h)=2f(0)h,\quad F_2(h)=[f(-h)+f(h)]h$$

作为 $F(h)=\int_{-h}^{h}f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值。试分析误差的阶，并求常数 λ,μ 使得 $\lambda F_1(h)+\mu F_2(h)$ 有尽可能小（尽量高阶的无穷小）的误差。

三、定积分计算

利用定积分的几何含义

例 6. 计算以下定积分：

$$(1)\int_0^2|1-x|\mathrm{d}x\qquad(2)\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\qquad(3)\int_{-1}^1 2x+1\mathrm{d}x$$

利用微积分基本定理，利用原函数计算定积分。

例 7. 计算以下定积分：

$$(1)\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x\qquad(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\qquad(3)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$$

$$(4)\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}\mathrm{d}x\qquad(5)\int_0^1\sqrt{2x+x^2}\mathrm{d}x\qquad(6)\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

$$(7)\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}\qquad(8)\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

利用对称性

例 8. (1) 设 $f\in\mathscr{C}[0,1]$. 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x,\quad \int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

(2) 求 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

(3) 证明对任何实数 α，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{\alpha}x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^{\alpha}x}$.

例 9. (1) 设 f 连续，证明 $\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$.

(2) 求 $\displaystyle\int_0^1 x\left(\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$.

四、一些证明题

例 10. 设 f 连续，证明：$\displaystyle\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^1\frac{h}{x^2+h^2}f(x)\mathrm{d}x=\pi f(0)$.

例 11. 设 $f\in\mathscr{C}[0,2\pi]$. 证明 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

例 12. 设 $f\in\mathscr{C}[a,b]$. 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b|f(x)|^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$