习题讨论课08题目：不定积分计算

★号（越）多表示题目（越）难

一、有理函数的不定积分

例 1. 计算以下不定积分：

(1) $\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$　(2) $\int \frac{x}{3-x^2}\mathrm{d}x$　(3) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{x}{x^2+x-6}\mathrm{d}x$　(5) $\int \frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x$　(6) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+8}\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x$　(8) $\int \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$　(9) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{1}{x^4-1}\mathrm{d}x$　(11) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^3+4}\mathrm{d}x$　(12) $\int \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$

(13) $\int \frac{x^7}{(1-x^2)^5}\mathrm{d}x$　(14) $\int \frac{1}{x^4(2x^2-1)}\mathrm{d}x$　(15) $\int \frac{1}{x(x^n+a)}\mathrm{d}x$

二、三角函数的不定积分

例 2. 计算以下不定积分：

(1) $\int (1-2\cot^2 x)\mathrm{d}x$　(2) $\int \tan x\mathrm{d}x$　(3) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}\mathrm{d}x$

(4) $\int \cos^2(1-2x)\mathrm{d}x$　(5) $\int \cos^3 x\mathrm{d}x$　(6) $\int \sin\alpha x\cos\beta x\mathrm{d}x$

(7) $\int \tan^4 x\mathrm{d}x$　(8) $\int \sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x$　(9) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$　(11) $\int \frac{1}{\sin x\cos^4 x}\mathrm{d}x$　(12) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$

(13) $\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x}\mathrm{d}x$　(14) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x$　(15) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\mathrm{d}x$

(16) $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$　(17) $\int \frac{1}{5+4\sin x}\mathrm{d}x$　(18) $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

(19) $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$　(20) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x$　$,x\in(0,\pi)$(21) $\int \sqrt{1+\csc x}\mathrm{d}x$

三、无理式的不定积分

例 3. 计算以下不定积分：

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$　(2) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\mathrm{d}x$　(3) $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$　(5) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}\mathrm{d}x$　(6) $\int \frac{x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$ (8) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$ (9) $\int x\sqrt{x+2}\mathrm{d}x$

(10) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ (11) $\int x\sqrt{x^4+2x^2-1}\mathrm{d}x$ (12) $\int x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x$

(13) $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\mathrm{d}x$ (14) $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x$ (15) $\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\mathrm{d}x$

四、换元法和分部积分

例 4. 计算以下不定积分：

(1) $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\mathrm{d}x$ (2) $\int \frac{1}{x^2}\sinh\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ (3) $\int x\sec^2(1-x^2)\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$ (5) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\mathrm{d}x$ (6) $\int \frac{2^x}{\sqrt{4-4^{x+1}}}\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$ (8) $\int \tanh x\mathrm{d}x$ (9) $\int \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x}\mathrm{d}x$

例 5. 计算以下不定积分：

(1) $\int x\cos 2x\mathrm{d}x$ (2) $\int x\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$ (3) $\int x^2\sin^2 x\mathrm{d}x$

(4) $\int x\arctan x\mathrm{d}x$ (5) $\int x\ln(x-1)$ (6) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$

(7) $\int \arccos^2 x\mathrm{d}x$ (8) $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$ (9) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

(10) $\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x$ (11) $\int \frac{\arcsin\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ (12) $\int \sin\ln x\mathrm{d}x$

五、杂题

例 6. 以下函数是否存在原函数？若存在，求它的不定积分。

(1) $|(x-1)(3x-2)|$

(2) $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

参考答案

请用 GeoGebra 的 CAS 自行检查计算结果