习题讨论课07题目：泰勒公式应用、函数凹凸性、曲线的渐近线

★号（越）多表示题目（越）难

一、Taylor 展开式

利用 Peano 余项 Taylor 公式加速计算，用 Lagrange 余项的 Taylor 公式进行估值。

如极限的计算

例 1. 阿基米德提出用圆内接正多边形周长逼近圆的周长，从而计算圆周率的近似值。他计算了正 96 边形，得到 $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$。后来不断有人尝试计算更多边的正多边形，其中著名的有荷兰的 Ludolph van Ceulen(公元 1540-1610)，他用了一生的时间计算了 2^{62} 边形，得到圆周率 35 位小数。中国古代南北朝时期的数学家和天文学家祖冲之 (公元 428-500) 曾经用刘徽的割圆术得到了圆周率 7 位小数，这个记录保持了 1000 多年。由初等的平面几何知识可得半径为 1 的圆的正 $3\cdot 2^n$ 边形的边长 a_n 和周长 L_n 满足递推关系：

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sqrt{2-2\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}} \qquad (*)\\
&= a_n\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{4-a_n^2}}}, \qquad (**)\\
L_{n+1} &= 3\cdot 2^{n+1}a_{n+1} = 3\cdot 2^{n+1}a_n\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{4-a_n^2}}} = L_n\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{L_n}{3\cdot 2^n}\right)^2}}},
\end{aligned}
$$

但这个收敛是很慢的，所以难怪 Ludolph van Ceulen 倾其一生用于 π 的计算。我们用 Taylor 展开对上述迭代进行修正，可以得到更快收敛的数列。

例 2. (1) 证明：对任意 $-1 \le x \le 1$，

拓展：定义域在实数域、值域在复数域上的函数的求导法则与定义域值域均在实数域上的函数一样

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots.$$

左右相减，得lagrange余项，即为证明此余项趋近于0
方法：复数域内因式分解，求导更方便

(2) 利用 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$，求 π 的近似值。

二、函数的凹凸性

【函数凹凸性定义以及性质】

1. f 在区间 I 上是凸函数：

$$f((1-t)x+ty) \le (1-t)f(x)+tf(y), \quad \forall x,y\in I, \forall t\in[0,1].$$

严格凸：上述不等式中的等号仅在平凡情形成立（$x=y$ 或 $t\in\{0,1\}$）.

2. f 在区间 I 上是凹（严格凹）函数：如果 $-f$ 区间 I 上是凸（严格凸）函数。

3. **Jensen不等式**：f 在区间 I 上是凸函数当且仅当 $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$，$\forall t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1] : t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$，

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n).$$

4. 凸函数的意义：
   - 加权平均：自变量的平均值的函数值不超过相应函数值的平均值。
   - 几何意义：弦位于弧的上方；内接三角形斜率有固定的大小顺序。

【凸函数的分析性质】

1. 凸函数是连续函数，在区间内到处都有单侧导数，几乎处处可导。
2. 可微函数 f 是凸（严格凸）函数当且仅当 f' 单调不减（严格增）。
3. 二阶可微函数 f 是凸函数当且仅当 $f'' \geq 0$。
4. 若 $f'' > 0$，则 f 是严格凸函数。
5. 可微的凸函数 f 的驻点必是最小值点，严格凸函数有唯一最小值点。

例 3. 证明对于任意正数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，都有

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_n^{x_n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

三、曲线的弯曲性质与渐近线

1. 凸函数的图像 $y = f(x)$ 是下凸曲线，曲线位于切线上方。
2. 凹函数的图像是上凸曲线，曲线位于切线下方。
3. 对参数曲线 $(x(t), y(t))$，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{(x'(t))^3}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{(y'(t))^3}$$

   若 $x'(t)$ 与行列式 $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}$ 同号，则平面曲线 $(x(t), y(t))$ 下（向 y 减小的方向）凸；
   若 $x'(t)$ 与行列式 $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}$ 异号，则平面曲线 $(x(t), y(t))$ 上（向 y 增大的方向）凸；

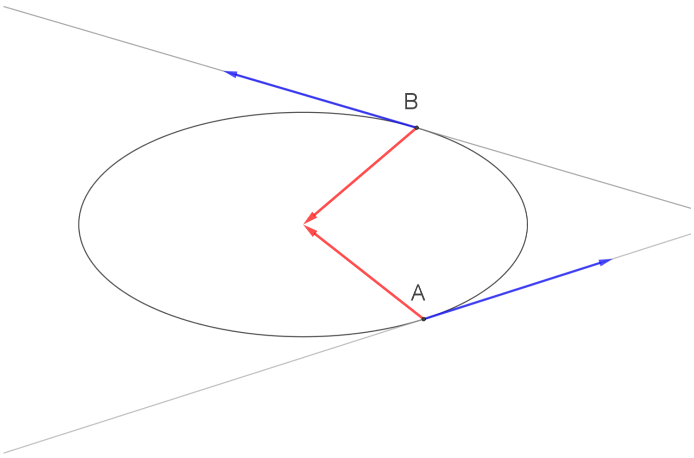

图 1: 曲线与加速度向量 $(x''(t), y''(t))$ 位于切线的同一侧

若 $y'(t)$ 与行列式 $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}$ 同号，则平面曲线 $(x(t), y(t))$ 向右（x 增大的方向）凸；

若 $y'(t)$ 与行列式 $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}$ 异号，则平面曲线 $(x(t), y(t))$ 向右（x 减小的方向）凸。

4. 曲线凹凸性改变的地方称为曲线的拐点。在拐点处，曲线位于切线的两侧。

5. 函数图像 $y = f(x)$ 的拐点即导函数 f' 单调性发生变化的地方。

   对二阶可微函数，若 $(x_0, f(x_0))$ 是函数图像的拐点，则必有 $f''(x_0) = 0$，但这仅仅是必要条件。

6. 对平面参数曲线 $(x(t), y(t))$，拐点处必然有 行列式 $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 0.$

7. 凸函数的图像位于其斜或水平渐近线的上方，凹函数图像位于其斜或水平渐近线的下方。

例 4. 设 f 在区间 $[a, +\infty)$ 上是凸函数，$y = kx + b$ 是 $y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的一条渐近线。

(1) 若 f 可微，证明：

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = k.$$

洛必达法则，不过首先要证明f'(x)的极限存在（正负无穷是可以的，只有震荡被认为极限不存在）

(2) 若 f 可微，证明：

$$f(x) \geq kx + b, \quad \forall x \geq a.$$

移到等号同一侧构造g(x)，证明g(x)恒大于0

(3) 若 f 严格凸，证明：

$$f(x) > kx + b, \quad \forall x \geq a.$$

注：对一般的曲线，$y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时有渐近线，极限 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ 未必存在。例如 $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x^2)$，$y = x$ 是 $y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的渐近线，但是 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2x}\sin(x^2) + 2\sqrt{x}\cos(x^2)$ 无界。震荡

例 5. 讨论函数 $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ 的凹凸性和渐近线。

例 6. 讨论平面曲线 $x^3 + y^3 = 3xy$ 的渐近线和曲线的位置关系。

期中讲评

例 7. 极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$. 取对数，lnx=y,趋于负无穷

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n + \sqrt[3]{9n^2 - n^3}\right)$ n的三次方提出来，再用Newton二项式展开

(3) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x - \arctan x}{\tan x - \arcsin x}$ 已知其为奇函数时，可以用待定系数法，设其为ax^3+bx+o(x^3)，代回sin(arcsinx)=x

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{\ln n}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)$ scolz公式：分母趋近于正无穷

例 8. 在 $x = 0$ 处Taylor展开 $\frac{1}{\cos x}$. 已知cosx的泰勒展开，直接多项式除法即得

其他题目根据大课老师建议选择