习题讨论课06答案：用导数研究函数——单调性极值，洛必达法则与泰勒公式

★号（越）多表示题目（越）难

一、基本定理

【微分中值定理】

- Rolle 定理：设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$，在 (a,b) 内可微，$f(a)=f(b)$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得
$$f'(\xi)=0.$$
用途：证明一些函数存在零点，证明其他微分中值定理（通过构造适当的辅助函数）。

  【推广的 Rolle 定理】：设 f 在 (a,b) 内可微，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得
$$f'(\xi)=0.$$

- Lagrange 微分中值定理：设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$，在 (a,b) 内可微，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$
用途：函数单调性

- Cauchy 微分中值定理：设 $f,g \in \mathscr{C}[a,b]$，在 (a,b) 内可微，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得
$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(\xi)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(\xi).$$
若 $g' \neq 0$，则
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$
用途：洛必达、泰勒公式

  【推广的 Cauchy 定理】：设 f,g 在 (a,b) 内可微，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\beta$，其中 $A,B,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$(B-A)g'(\xi)=(\beta-\alpha)f'(\xi).$$

- 这些微分中值定理很重要，因为它们是进一步研究函数性质的重要工具。但需要提醒学习者的是，工具本身并不是目的，更不要因一些矫揉造作的题目而养成不良嗜好。

【导数与单调性】

以下结论可以用 Lagrange 微分中值定理直接得到，但也可以用其他办法得到（详见习题课05例1的解答）

1. 设 f 在**开区间** I 上可微. 则 $f' \geq 0 \iff f$ 在 I 上单调不减。

2. 设 f 在**开区间** I 上可微. 则 $f' > 0 \Longrightarrow f$ 在 I 上单调增。

3. 设 f 在**开区间** I 上可微. 则 $f' \neq 0 \Longrightarrow f$ 在 I 上严格单调。

   这里要用到 Darboux 定理：区间上的导函数具有介值性质。

注：(1) 设 f 在闭区间 I 上连续. f 在 I 的内部单调 $\Longrightarrow f$ 在 I 上单调。

(2) 仅从 $f'(x_0) > 0$ 可以得出 f 在 x_0 邻域中不是单调不增的，但得不出在 x_0 邻域中的单调不减或单调增结论。详见习题课05例2.

(3) 如果 f' 在 x_0 的邻域内连续，且 $f'(x_0) > 0$，则 f 在 x_0 的一个充分小邻域内严格增。

(4) 如果 $f'(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0$，$f^{(2n+1)}(x_0) > 0$，则 f 在 x_0 的一个充分小邻域内是严格增的。

【最值与极值】

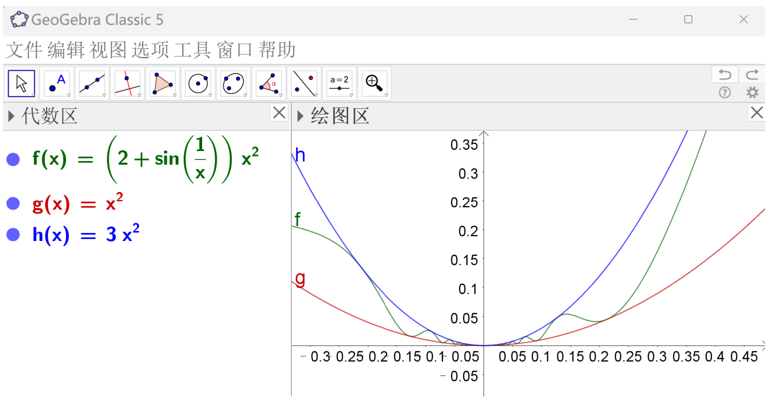
1. 最值的存在性：连续函数在有界闭集上取得最大值和最小值。

2. 如果 f 可微，且对任意 $u, v : u < x_0 < v$，都有 $f'(u) \leq 0 \leq f'(v)$，则 f 在 x_0 取得最小值。

   但 f 在最小值/极小值两侧，未必是单调的，比如

$$f(x) = \begin{cases} (2 + \sin \frac{1}{x})x^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

因此上述结论中的条件只是充分条件。



3. **【Fermat引理】** 如果 f 在其极值点 x_0 处可微，则 $f'(x_0)=0$.

   称 f' 的零点为 f 的**驻点**或**临界点**，称 f 在其临界点取的函数值为 f 的**临界值**.

   但驻点未必是极值点。比如 $x=0$ 是 x^3 的驻点，但不是极值点。

   Fermat 引理帮助我们缩小了寻找最值点的范围：有界闭区间中，可微函数的最值点或是边界点，或是驻点。

4. 称 f 的临界点 x_0 是**非退化的**，指 $f''(x_0)\neq 0$.

   非退化临界点都是极值点。

   若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0$，则 x_0 是 f 的严格极小值点。

   一般地，若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2n-1)}(x_0)=0$（这是退化临界点），$f^{(2n)}(x_0)>0$，则 x_0 是 f 的严格极小值点。

   从泰勒展开的角度看，

$$f(x)=f(x_0)+\left(\frac{f^{2n}(x_0)}{(2n)!}+o(1)\right)(x-x_0)^{2n}>f(x_0),\quad x\to x_0.$$

5. 若

$$f'(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0), f^{(2n+1)}(x_0)>0,$$

   则 f 在 x_0 的一个充分小邻域中严格增，从而 x_0 不是极值点。

例 1. 试找“最好的”常数 A,B 使得

$$\arctan(1+x)-\frac{\pi}{4}\geq\frac{x}{Ax+B},\quad \forall x>0.$$

解. 记

$$f(x)=\arctan(1+x)-\frac{\pi}{4}-\frac{x}{Ax+B}.$$

在区间 $(0,+\infty)$ 右端，

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{A}\geq 0,$$

所以 $A\geq\frac{4}{\pi}$.

在区间 $(0,+\infty)$ 左端， $f(0)=0$， $f'(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{B}\geq 0$，所以 $B\geq 2$.

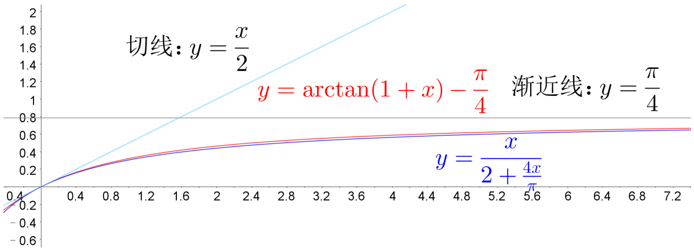
因此所谓“最好”，就是 A,B 的值尽量小，从而使 $\frac{x}{Ax+B}$ 尽可能大。

考虑

$$f(x)=\arctan(1+x)-\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2+\frac{4x}{\pi}}.$$

则

$$f'(x)=-\frac{x[(\pi^2-8)x-2\pi(4-\pi)]}{2(1+(1+x)^2)(2x+\pi)^2}.$$



当 $0<x<\frac{2\pi(4-\pi)}{\pi^2-8}=x^*$ 时，$f'(x)>0$，f 是增函数，$f(x)>f(0)=0$.
当 $x>\frac{2\pi(4-\pi)}{\pi^2-8}$ 时，$f'(x)<0$，f 是减函数，$f(x)>\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$.
所以 $A=\frac{4}{\pi},B=2$ 是满足条件的最好的解，此时用 $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi x}{2\pi+4x}$ 作为 $\arctan(1+x)$ 的近似值，最大误差为 $f(x^*)\approx 0.025$. □

例 2. 求满足 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leq \mathrm{e}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$（$\forall n\in\mathbb{N}^*$）的参数 α,β 的范围。

解. 考虑函数

$$f_\alpha(x)=(x+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=(x+\alpha)\big[\ln(x+1)-\ln x\big].$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f_\alpha(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\alpha)\left[\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=1.$

$$f'_\alpha(x)=\ln(x+1)-\ln x+(x+\alpha)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+\alpha}{x(x+1)}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'_\alpha(x)=0.$

$$f''_\alpha(x)=\frac{(2a-1)x+a}{x^2(x+1)^2}.$$

情形1：当 $\alpha\geq\frac{1}{2}$ 时， $f''_\alpha(x)>0$，$\forall x>0$. 所以 f'_α 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数，从而 $f'_\alpha(x)<f'_\alpha(+\infty)=0$，从而 f_α 是严格减函数，$f_\alpha(x)>f_\alpha(+\infty)=1$，从而 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}>\mathrm{e}$（$\forall x>0$）.

情形2：当 $\alpha\leq 0$ 时， $f''_\alpha(x)<0$（$\forall x>0$），f'_α 在区间 $(0,+\infty)$ 中是严格减函数，$f'_\alpha(x)>f'_\alpha(+\infty)=0$，从而 f_α 严格增，$f_\alpha(x)<f_\alpha(+\infty)=1$，从而 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}<\mathrm{e}$（$\forall x>0$）.

情形3：当 $0<\alpha<\frac{1}{2}$ 时， 对 $0<x<\frac{\alpha}{1-2\alpha}$，$f''_\alpha(x)>0$；对 $x>\frac{\alpha}{1-2\alpha}$，$f''_\alpha(x)<0$. f'_α 在区间 $[\frac{a}{1-2a},+\infty)$ 中严格减，$f'_\alpha(x)>f'_\alpha(+\infty)=0$.

情形3.1： 如果 f'_α 不变号，则对任意 $x>0$，$f'_\alpha(x)\geq 0$，从而 f_α 单调不减，$f_\alpha(x)\leq f_\alpha(+\infty)=1$，从而数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$ 各项都不大于 e.

情形3.2： 如果 f'_α 变号，则 f'_α 有零点 ξ.

我们证明在区间 $(0,+\infty)$ 中，f'_α 至多只有一个零点。

假设 f'_α 在区间 $(0,+\infty)$ 中有两个零点 $0<x_1<x_2$，再结合 $f'_\alpha(+\infty)=0$，由广义Rolle定理知，f''_α 在 (x_1,x_2) 和 $(x_2,+\infty)$ 中至少各有一个零点，然而 f''_α 只有一个零点，所以得到矛盾。

所以 ξ 是 f'_α 的唯一零点，且 $\forall x<\xi<y$，$f'_\alpha(x)<0<f'_\alpha(y)$.

于是 f_α 在区间 $(0,\xi)$ 中严格减，在区间 $(\xi,+\infty)$ 中严格增。因此对任意 $x>\xi$，$f_\alpha(x)<f_\alpha(+\infty)=1$，所以当 $n\ge\xi$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}<\mathrm{e}$.

因此数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$ 要么各项严格增，此时各项都小于 e；要么开始有限项严格减，此后严格增，此时各项都不超过 e 当且仅当数列第一项

$$2^{1+\alpha}\le\mathrm{e},$$

由此解得 $\alpha\le\frac{1}{\ln 2}-1\approx 0.442695$.

结论：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\le\mathrm{e},\forall n\ge 1\iff\alpha\le\frac{1}{\ln 2}-1,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}\ge\mathrm{e},\forall n\ge 1\iff\beta\ge\frac{1}{2}.$$

另外，可以证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\text{严格增}\iff\alpha<\frac{2\ln 3-3\ln 2}{2\ln 2-\ln 3},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}\text{严格减}\iff\beta\ge\frac{1}{2}.$$

□

二、不定型极限

基本情况：

$$\frac{o(1)}{o(1)},\quad\frac{\infty}{\infty}$$

转化为基本情况：

$$o(1)\cdot\infty=\frac{o(1)}{\frac{1}{\infty}},\quad\infty-\infty=\infty\left(1-\frac{\infty}{\infty}\right),$$

$$\infty^{o(1)}=\mathrm{e}^{o(1)\cdot\ln\infty},\quad(1+o(1))^{\infty}=\mathrm{e}^{\infty\cdot\ln(1+o(1))}.$$

处理基本情况的办法：

1. 渐近展开：找主项，确定阶
   (a) 在有限点渐近展开：Taylor 展开。
   (b) 无穷远点展开

渐近展开的方法也可以直接应用于其他情形的不定型极限。

2. L'Hôpital 法则：只处理比值情形的不定型极限。利用导函数

完整正确地理解洛必达法则

不要把洛必达法则简单地理解成公式

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{*}$$

洛必达法则的先决条件：

- f,g 在 c 的去心邻域中可导（在 c 处甚至可以没定义）
- f,g 同为无穷小量，或者 g 为无穷大量（当 f 有界时，无需洛必达；当 f 无界时，不要求 f 必须是无穷大量）
- $g'\neq 0$
- (*) 式等号右端（导数一侧）极限存在（收敛或无穷极限）。

洛必达法则的结论： (*) 式等号左端（不求导的一侧）极限存在（**结论1**），且与右端极限值相等（**结论2**）。

使用洛必达法则时的注意事项：

- 完整验证条件；
- 勿把条件和结论搞颠倒，不能从 (*) 的左边得到右边；
- 导数端极限存在仅仅是函数端极限存在的充分条件，不是必要的；当导数端极限不存在时，洛必达法则不能使用，但不意味着函数端极限不存在；
- 使用洛必达法则时，先进行化简，然后再适当时候再使用洛必达法则，避免复杂的导数计算；
- 能不用洛必达法则就尽量不用洛必达法则。尽量使用初等化简方法（换元）和泰勒展开。不要沉迷于洛必达法则。

例 3. (1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处右连续，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=A\in\mathbb{R}$. 证明 f 在 x_0 处有右导数，且 $f'_+(x_0)=A$.

(2) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A\in\mathbb{R}$. 证明 f 在 x_0 处有导数，且 $f'(x_0)=A$.

(3) 设 f 可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A\in\mathbb{R}$. 若 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时有渐近线，则渐近线斜率为 A.

证明.

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{1}.$$

□

注：$f'_+(x_0)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 的含义是不同的，前者是点 x_0 处曲线的右切线的斜率，后者是 x_0 右边点的切线斜率的极限。

注：事实上，上面这个例子不仅是 L'Hôpital 法则的简单应用，如果把它的证明看成是 Lagrange 微分中值定理的应用，那么这个简单例子蕴含了一般的 $\frac{o(1)}{o(1)}$ 类型的 L'Hôpital 法则。视 $(g(t), f(t))$ 为平面上的可微曲线，$t\to t_0$ 时该曲线上的点趋于坐标系原点$(0,0)$。由于 $g'(t)\neq 0$，所以 $g(t)$ 严格单调，从而 $x=g(t)$ 有可微的反函数 $t=g^{-1}(x)$，此时曲线是可微函数 $y=f(g^{-1}(x))=F(x)$ 的图像，$x=0$ 是这个函数的一个可去间断点，补充定义使 $F(0)=0$，从而 F 在 $x=0$ 处连续。

$$F'(x)=\frac{f'(t)}{g'(t)}\to A, \quad x\to 0,$$

意味着 $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{g(t)}{f(t)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=F'(0)=A$。

事实上，Cauchy 微分中值定理也可以用类似的办法由 Lagrange 微分中值定理得到。

例 4. 求以下极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x$.（$\alpha>0$）

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$.（$\alpha>0$）

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan\tan x}{\sin x-\sin\sin x}$

解. (1) **解法1**： 分子

$$\ln\cot x=\ln\cos x-\ln\sin x=\ln(1+o(1))-\ln[x(1+o(1))]=-\ln x+o(1),$$

分子主项是 $-\ln x$，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln x+o(1)}{\ln x}=-1.$$

解法2. 洛必达（这是教材上例题中的方法）

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\cot x}\cdot\dfrac{-1}{\sin^2 x}}{\dfrac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\cos x\sin x}=-1.$$

(2)**解法1** 换元 $x^\alpha=\mathrm{e}^{-t}$，则 $t=-\alpha\ln x\to+\infty$，

$$x^\alpha\ln x=\frac{-t}{\alpha\mathrm{e}^t}\to 0.$$

解法2. 洛必达（这是教材上例题中的方法）

(3)**解法1** 换元 $t = x^\alpha$，则 $x \to +\infty$ 时，$t \to +\infty$，

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln t}{\alpha t},$$

而我们已知极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

解法2. 洛必达（这是教材上例题中的方法）

(4) **解法1：** 换元 $t = \frac{\pi}{2} - \arctan x$，则 $\cot t = x$，且当 $x \to +\infty$ 时，$t \to 0^+$，

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x^{-1}} = \frac{t}{\tan t} = \frac{t}{\sin t}\cos t \to 1.$$

解法2：洛必达（这是教材上例题中的方法）

(5) **解法1：** 换元 $x = 1 + t$，则当 $x \to 1$ 时，$t \to 0$，

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} &= \frac{1+t}{t} - \frac{1}{\ln(1+t)} \\
&= 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)} \\
&= 1 + \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{t}{2} + o(t)}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{t}\left(1 - \left(1 + \frac{t}{2} + o(t)\right)\right) = 1 - \frac{1}{2} + o(1) \to \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

解法2：洛必达（这是教材上例题中的方法）

(6) **解法1：**Taylor 展开

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x - x}{x} + o\left(\frac{\sin x - x}{x}\right)\right) \\
&= \lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} + o(1) = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

所以原极限为 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

解法2：

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+u)}{u}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} \qquad \left(u = \frac{\sin x}{x} - 1\right) \\
&= \lim_{x\to0}\frac{\sin x - x}{x^3} \qquad \text{以下用洛必达，也可以用泰勒展开} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

所以原极限为 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

注：适当化简后再用洛必达，避免复杂的导数计算。

解法3：洛必达（这是教材上例题中的方法）

(7)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan\tan x}{\sin x-\sin\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x}{\cos x}\cdot\frac{1-(1+\tan^2\tan x)}{1-\cos\sin x} \qquad \text{洛必达}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}\sin^2 x+o(\sin^2 x)}=-2.
\end{aligned}
$$

□

例 5 (洛必达真的必达吗？未必). 以下解答正确吗？为什么？

(1)

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\cos(x^2)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}4x^{\frac{3}{2}}\cos(x^2)
$$

极限不存在。

(2) 对 $f(x)=2x+\sin 2x$，$g(x)=\mathrm{e}^{\sin x}f(x)$，

$$
f(x)>2x-1\to+\infty,\quad x\to+\infty,
$$

$$
g(x)>\mathrm{e}^{-1}(2x-1)\to+\infty,\quad x\to+\infty,
$$

$$
f'(x)=2+2\cos 2x=4\cos^2 x,
$$

$$
g'(x)=\mathrm{e}^{\sin x}\left(f(x)\cos x+f'(x)\right)=\mathrm{e}^{\sin x}\left(2x+\sin 2x+4\cos x\right)\cos x
$$

$$
\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|=\left|\frac{4\cos x}{\mathrm{e}^{\sin x}(2x+\sin 2x+4\cos x)}\right|\le\frac{4\mathrm{e}}{2x-5}\to 0,\quad x\to+\infty.
$$

所以

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0.
$$

解. (1) 这里不能使用洛必达法则，因为导数比值极限并不存在。 正确做法是

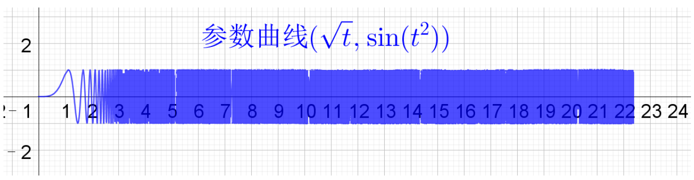


图 1: 例5(1)

$$
\left|\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{x}}\to 0.
$$

(2) 事实上，$\frac{f(x)}{g(x)}=\mathrm{e}^{-\sin x}$ 在 $x\to+\infty$ 时没有极限。

这里不能使用洛必达法则，因为 $g'(x)\neq 0$ 这个条件不成立。

下图中显示了参数曲线 $(g(t),f(t))$，虽然它总体上是不断向右且趋于右方无穷远，但它总是左右折返而不是单调向右的。

□

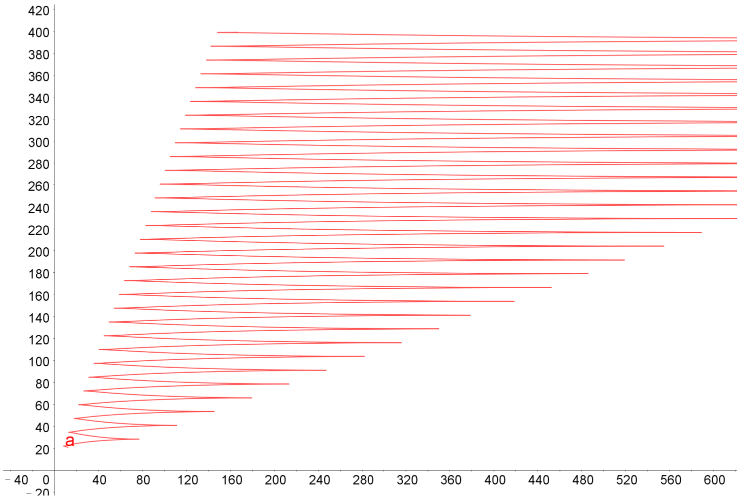


图 2: 例5(2)

事实上，洛必达法则中要求 $g'(x) \neq 0$，不仅仅是为了使分式 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 有意义，更是为了使 $g(x)$ 是严格单调的。因为根据 Darboux 定理，导函数 $g'(x)$ 不取零值意味着导函数 $g'(x)$ 总是正或者总是负，从而 $g(x)$ 是严格增或者严格减。

洛必达法则的几何意义：考虑平面上的可微曲线 $(g(t), f(t))$，它满足

- $g'(t) > 0$，$g(t) \to \infty$（$+\infty$），曲线上的点单调向右趋于无穷远；
- $\frac{f'(t)}{g'(t)} \to A$，运动的速度方向斜率接近 A；

结论是：曲线上的点与原点连线斜率 $\frac{f(t)}{g(t)}$ 趋于 A.

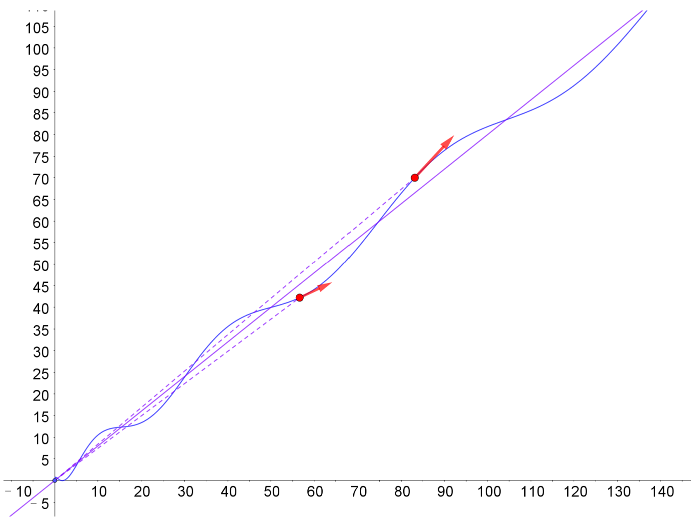


图 3: 洛必达法则的几何意义

三、Taylor 展开式

Taylor 展开的目的是用多项式逼近可微函数。多项式的次数与函数的可微性程度有关。选择用多项式来做逼近，主要原因是多项式只涉及有限次加法和乘法，运算方便。

有不同余项形式的 Taylor 公式，它们取决于函数的可微程度以及我们的目的。Peano 余项的 Taylor 公式主要是处理函数的局部性质（极限、收敛的阶等等）。Lagrange 余项、Cauchy 余项、积分余项的 Taylor 公式可以用于处理函数在更大范围内的整体性质。

在 Peano 余项的意义下，Taylor 多项式是给定次数的多项式范围内唯一的局部最佳逼近。这使得我们不必通过求导就可以得到一些函数的 Taylor 多项式。为实现这个目的，我们需要

1. 熟练掌握基本初等函数的 Taylor 展开：$\mathrm{e}^x, (1+x)^\mu, \sin x, \cos x$
2. 了解 f 和它的导数 f' 的 Taylor 多项式的关系：比如
$$(1+x)^{-1} \longleftrightarrow \ln(1+x), \quad (1+x^2)^{-1} \longleftrightarrow \arctan x,$$
$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \longleftrightarrow \arcsin x.$$
3. 了解除法的处理办法
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots.$$
4. 复合：换元代入。

【乘积的 Taylor 展开】

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$$

		1	x	x^2	$\cdots$	x^n	$o(x^n)$
		b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	
1	a_0	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	$\cdots$	a_0b_n	o
x	a_1	a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	$\cdots$	o	o
x^2	a_2	a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	$\cdots$	o	o
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x^n	a_n	a_nb_0	o	o	$\cdots$	o	o
$o(x^n)$	o	o	o	o	o	o	o

上述矩阵中按从左下到右上的斜线方向求和（即角标之和为常数 k 的项 a_ib_{k-i} 的和），得到乘积 fg 中 x^k 的系数。角标之和大于 n 的项都被合并到余项 $o(x^n)$ 中.

【除法的 Taylor 展开】

可以用升幂排列的多项式的除法。详见下面例子中的第2问。

例 6. (1) 写出 $\sin x, \cos x$ 在 $x=0$ 处带 Peano 余项的 5 阶 Taylor 展开；
(2) 写出 $\tan x$ 在 $x=0$ 处带 Peano 余项的 5 阶 Taylor 展开；
(3) 如果 $\mathscr{C}^\infty$ 函数 f, g 满足

$$f(x) = x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + o(x^7), \quad x \to 0,$$

$$g(x) = x + b_3x^3 + b_5x^5 + b_7x^7 + o(x^7), \quad x \to 0,$$

请写出 $f(g(x))$ 在 $x=0$ 处带 Peano 余项的 7 阶 Taylor 展开；
(4) 设 f 是可逆的 $\mathscr{C}^\infty$ 奇函数，且

$$f(x) = x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + o(x^7).$$

请写出反函数 f^{-1} 在 $x=0$ 处带 Peano 余项的 5 阶 Taylor 展开；
(5) 求极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\tan x - \tan\sin x}{\arcsin\arctan x - \arctan\arcsin x}.$$

解：. (1)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), x \to +\infty,$$

多项式部分逐项求导，得到

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5).$$

最后这个余项是这样确定的：$\cos x$ 是偶函数，所以在 $x=0$ 处 Taylor 展开只有偶次方项，所以上述多项式也是 $\cos x$ 在 $x=0$ 处的 5 阶 Taylor 多项式，故余项可以写成 $o(x^5)$.
(2) **方法1**：用等比数列求和，

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots.$$

$$\begin{aligned}
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} \\
&= \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right] \\
&\quad \cdot \left[1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 + o(x^4)\right] \\
&= \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right] \cdot \left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right] \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

方法2：用**长除法**计算（类似多项式除法，但因 $x \to 0$，所以按升幂——即次数从小到大——顺序排列）

$$
\begin{array}{rr}
 & x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5) \\ \cline{2-2}
1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4) & \big)\, x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5) \\
 & x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}+o(x^5) \\ \cline{2-2}
 & \frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+o(x^5) \\
 & \frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6}+o(x^5) \\ \cline{2-2}
 & \frac{2x^5}{15}+o(x^5) \\
 & \frac{2x^5}{15}+o(x^5) \\ \cline{2-2}
 & o(x^5) \\
 & o(x^5) \\ \cline{2-2}
 & \text{“0”}
\end{array}
$$

方法3：用**待定系数法**，$\tan$ 是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数，有任意阶的 Taylor 展开。设 $\tan x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)$. 则

$$(\tan x)' = a_1 + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 + o(x^4).$$

利用

$$(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2,$$

得到

$$
\begin{aligned}
a_1 + 3a_3x^2 + 5a_5x^4 + o(x^4) &= 1 + \big(a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)\big)^2 \\
&= 1 + a_1^2x^2 + 2a_1a_3x^4 + o(x^4),
\end{aligned}
$$

于是由 Peano 余项 Taylor 公式的唯一性，比较上式两边的系数，得到 $a_1 = 1$，$3a_3 = a_1^2 = 1$，$5a_5 = 2a_1a_3$，进而 $a_3 = \frac{1}{3}$，$a_5 = \frac{2}{15}$. 因此

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

(3) 设

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + \cdots, \\
g(x) &= x + b_3x^3 + b_5x^5 + b_7x^7 + \cdots,
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) = {} & (x + b_3x^3 + b_5x^5 + b_7x^7 + \cdots) + a_3(x + b_3x^3 + b_5x^5 + b_7x^7 + \cdots)^3 \\
& + a_5(x + b_3x^3 + b_5x^5 + b_7x^7 + \cdots)^5 \\
& + a_7(x + b_3x^3 + b_5x^5 + b_7x^7 + \cdots)^7 + \cdots \qquad (*) \\
= {} & x + (a_3 + b_3)x^3 + (a_5 + b_5 + 3a_3b_3)x^5 \\
& + (a_7 + b_7 + 3a_3b_3^2 + 3a_3b_5 + 5a_5b_3)x^7 + o(x^7),
\end{aligned}
$$

其中 $\cdots$ 都是 $o(x^7)$.

(4) 反函数 $h=f^{-1}$ 也是奇函数，并且 h 也是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数。设 $h(x)=f^{-1}(x)=x+c_3x^3+c_5x^5+o(x^5)$（**待定系数法**）. 由 (*) 式知

$$x=x+(a_3+c_3)x^3+(a_5+c_5+3a_3c_3)x^5+o(x^5),$$

比较系数得到

$$c_3=-a_3,\quad c_5=-3a_3c_3-a_5=3a_3^2-a_5.$$

(5) 对(3)中的 f,g，由(*)知

$$f(g(x))-g(f(x))=(3a_3b_3^2-3b_3a_3^2-2a_3b_5+2a_5b_3)x^7+o(x^7).\qquad (**)$$

即 $f(g(x))-g(f(x))$ 是 7 阶无穷小，其首项系数由 f,g 的 5 阶 Taylor 多项式的系数决定。

由(4)知，

$$f^{-1}(x)=x-a_3x^3+(3a_3^3-a_5)x^5+o(x^5),$$
$$g^{-1}(x)=x-b_3x^3+(3b_3^3-b_5)x^5+o(x^5).$$

对 f^{-1} 和 g^{-1} 使用 (**) 的结论，得到

$$\begin{aligned}&f^{-1}(g^{-1}(x))-g^{-1}(f^{-1}(x))\\=&\big(3(-a_3)(-b_3)^2-3(-b_3)(-a_3)^2+2(-b_3)(3a_3^2-a_5)-2(-a_3)(3b_3^2-b_5)\big)x^7+o(x^7)\\=&(3a_3b_3^2-3a_3^2b_3+2a_5b_3-2a_3b_5)x^7+o(x^7),\end{aligned}$$

它与 $f(g(x))-g(f(x))$ 具有相同的 7 阶 Taylor 多项式。所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(g(x))-g(f(x))}{f^{-1}(g^{-1}(x))-g^{-1}(f^{-1}(x))}=1.$$

□

解法2. 见 Arnold《惠更斯与巴罗，牛顿与胡克》一书的附注。 □

练习：求 $f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 5 阶 Taylor 展开。

例 7. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x\sqrt{1-2x}-\cos(\sqrt{2}x)}{\sin^3x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)\right\}$.

(6) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2h)+2f(-h)-3f(0)}{h^2}$，其中 $f''(0)=1$.

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\sqrt{n+n^\alpha}-\sin\sqrt{n}\right)$.

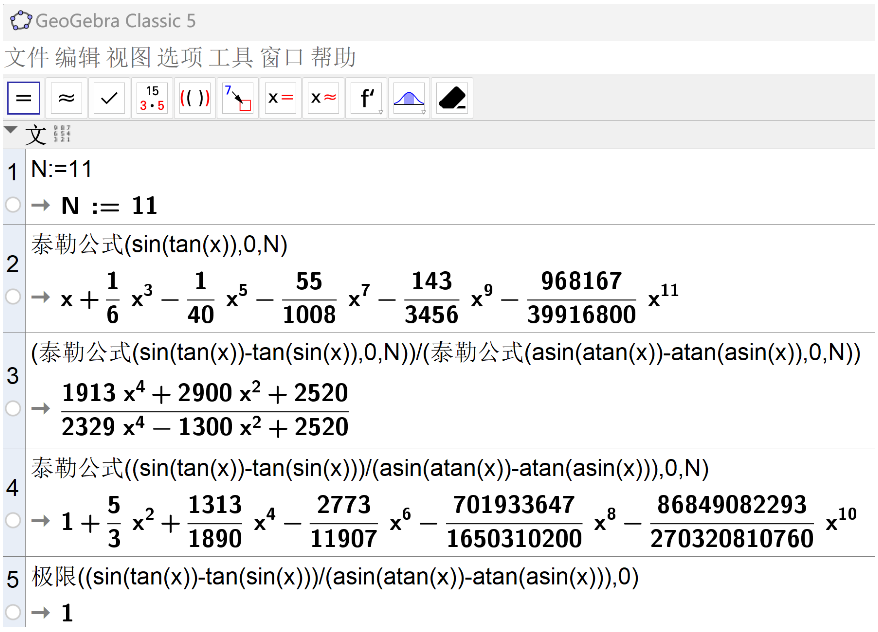


图 4: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\tan x-\tan\sin x}{\arcsin\arctan x-\arctan\arcsin x}=1$

解. (1)

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2x}&=1+\frac{1}{2}(-2x)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}(-2x)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{6}(-2x)^3+o(x^3)\\&=1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3),\end{aligned}$$

$$\cos(\sqrt{2}x)=1-\frac{2x^2}{2}+o(x^3)=1-x^2+o(x^3),$$

$$\begin{aligned}&\frac{e^x\sqrt{1-2x}-\cos(\sqrt{2}x)}{\sin^3 x}\\=&\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-\left(1-x^2+o(x^3)\right)}{x^3(1+o(1))}\\=&\frac{-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{x^3(1+o(1))}\to-\frac{4}{3},\quad x\to 0.\end{aligned}$$

(2)

$$\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4}\to-\frac{1}{12},\quad x\to 0.$$

(3) 记 $t=x-1$，则 $t\to 0$，

$$x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\frac{\ln(1+t)}{-t}}\to e^{-1}.$$

(4) 记 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则 $t\to 0^+$，

$$(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}=e^{t\ln\cos t-t\ln\sin t}=e^{o(1)}\to 1,\quad t\to 0^+.$$

(5)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)\right\}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x-(1-x)\ln(1+x)}{x^2} \qquad \text{通分，判断需要展开的阶}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x-(1-x)\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

(6) 设 $f(x)=a_0+a_1+\frac{x^2}{+}o(x^2)$（$x\to 0$）. 则

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)+2f(-h)-3f(0)}{h^2}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{a_0+a_1(2h)+\frac{(2h)^2}{2}+o(h^2)+2a_0+2a_1(-h)+(-h)^2+o(h^2)-3a_0}{h^2}\\
=&3.
\end{aligned}
$$

或者用一次洛必达（需要验证洛必达条件），再用微分定义。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)+2f(-h)-3f(0)}{h^2}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{2f'(2h)-2f'(-h)}{2h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f'(0)+(2h)+o(h)-f'(0)-(-h)+o(h)}{h}=3.
\end{aligned}
$$

(7)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1+\frac{1}{2}(x^2)+o(x^2)-\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^2)\right)}=4
\end{aligned}
$$

(8) 当 $\alpha<\frac{1}{2}$ 时，

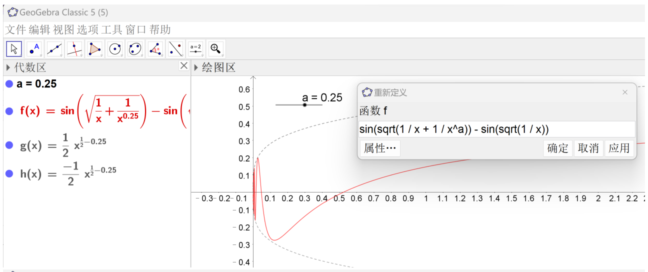
$$
\begin{aligned}
\sin\sqrt{n+n^\alpha}-\sin\sqrt{n}&=\cos\xi\cdot\left[\sqrt{n+n^\alpha}-\sqrt{n}\right]\\
&=\cos\xi\cdot\sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\\
&=\cos\xi\cdot\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}-\alpha}}\to 0,\quad n\to+\infty.
\end{aligned}
$$

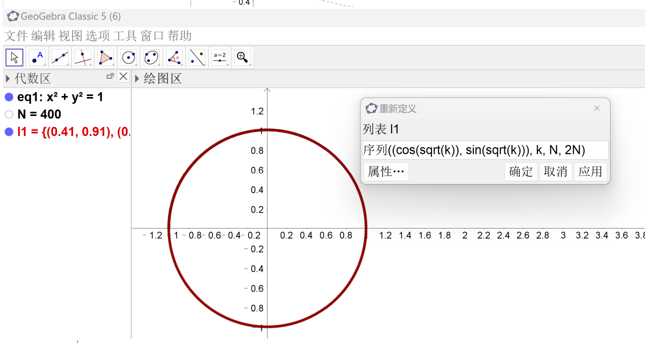
当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，

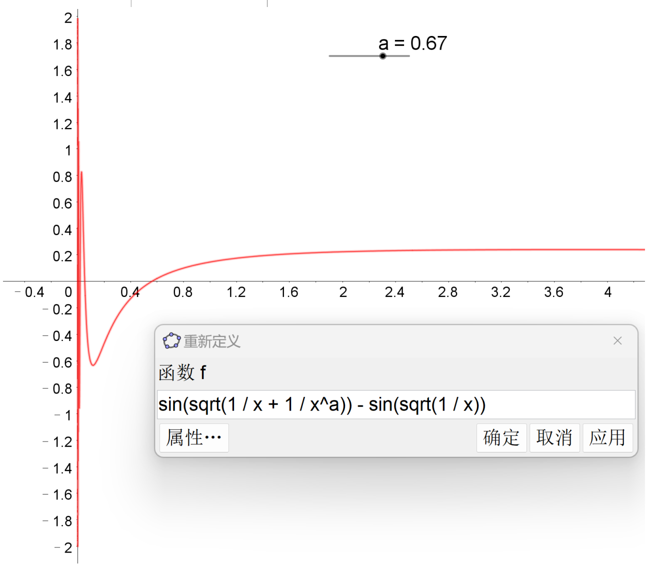
$$
\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]=\frac{1}{2}+o(1),\quad n\to+\infty,
$$

$$
\begin{aligned}
&\sin\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sin\sqrt{n}\\
=&\sin\sqrt{n}\left[\cos\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)-1\right]+\cos\sqrt{n}\sin\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\\
=&\sin\sqrt{n}\left[\cos\frac{1}{2}+o(1)-1\right]+\cos\sqrt{n}\left(\sin\frac{1}{2}+o(1)\right)\\
=&\sin\left(\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)-\sin\sqrt{n}+o(1)
\end{aligned}
$$

因为 n 弧度的点在单位圆周上稠密，所以 $\sqrt{n}$ 弧度的点也在单位圆周上稠密。因此上述数列有子列收敛于 $\sin\frac{1}{2}$，也有子列收敛于 $\sin\left(\pi+\frac{1}{2}\right)=-\sin\frac{1}{2}$. 所以原数列不收敛。 对 $\alpha>\frac{1}{2}$，由函数图像知数列不收敛，证明留给感兴趣的读者。







□

例 8. 设 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内二阶可导。证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

证明. 在 $\frac{a+b}{2}$ 处做泰勒展开，存在 $\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 以及 $\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$，使得

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

二者相加得到

$$f(a)+f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4},$$

由 Darboux 定理，f'' 具有介值性质，所以存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得

$$f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}.$$

□

例 9. 证明 $\frac{3}{2}<\tan 1<\frac{\pi}{2}$.

证明. 记 $f(x)=a\cos x-\sin x$，$a>0$. 则

$$f(x)=a\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{\cos\xi_1}{8!}x^8\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{\sin\xi_2}{7!}x^7\right),$$

ξ_1,ξ_2 介于 $0,x$ 之间。所以

$$f(1)=a\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{720}+\frac{\cos\xi_1}{8!}\right)-\left(1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\frac{\sin\xi_2}{7!}\right),$$

因此

$$\begin{aligned}p(a):=a\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{720}\right)-\left(1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}\right)<f(1)\\<a\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{720}+\frac{1}{8!}\right)-\left(1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\frac{1}{7!}\right)=:q(a),\end{aligned}$$

$p(\frac{\pi}{2})>p(1.57)=\frac{467}{72000}>0$，从而 $\tan 1<1.57<\frac{\pi}{2}$. 另一方面，$q(\frac{3}{2})=-\frac{267}{8960}<0$，因此 $\tan 1>\frac{3}{2}$. □

例 10. 设 f 在含 0 的开区间 I 上有连续的 $n+1$ 阶导数，$f(0)=0$，

$$F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\in I\backslash\{0\},\\ f'(0), & x=0.\end{cases}$$

证明 F 在 I 内有连续的 n 阶导数.

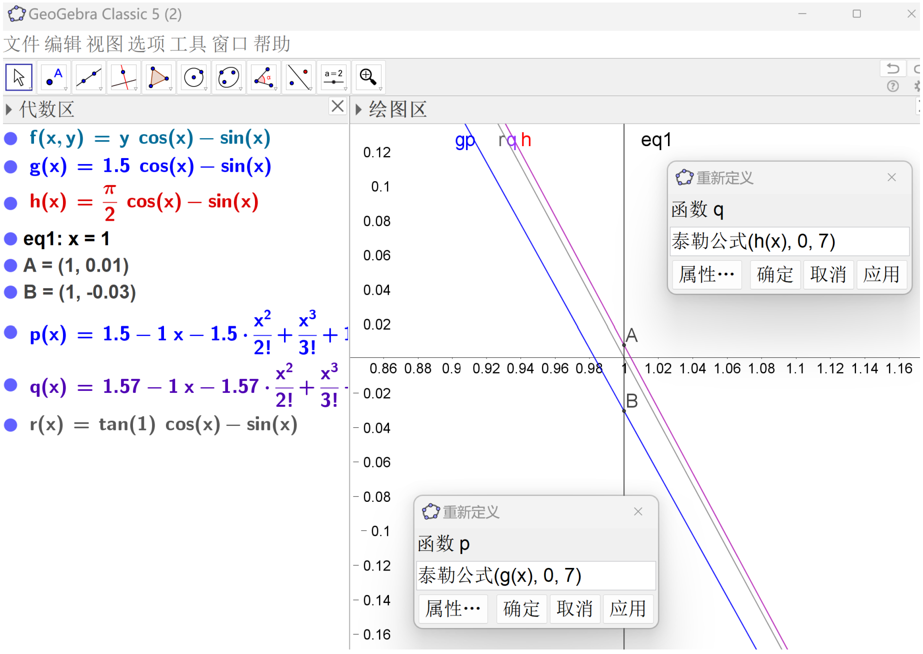


图 5: $\frac{3}{2} < \tan 1 < \frac{\pi}{2}$

证明1：． 由 f 的 Taylor 公式

$$f(x) = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + o(x^{n+1}), \quad x \to 0.$$

得到

$$F(x) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}x + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$$

所以

$$f'(0) = F(0), \quad \frac{f''(0)}{2} = F'(0), \quad \ldots, \quad \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} = F^{(n)}(0).$$

所以 F 在 $x = 0$ 处 n 阶可导。

另由上次习题课结论，F 在 $x \neq 0$ 处 $n+1$ 阶可导。

所以 F 在 I 内 n 阶可导。 $\square$

但是这个证明是错误的！然而它可以向我们预示关于 $F^{(k)}(0)$ 的结论。所以错误的方法有时也是有价值的。

证明2：． 利用 f 在 x 处的 Lagrange 余项的 Taylor 公式，得到

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(x)}{2!}(0-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(0-x)^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(0-x)^{(k+1)!},$$

于是当 $x \neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}F^{(k)}(x) &= \sum_{j=0}^{k} f^{(j)}(x)\left(\frac{1}{x}\right)^{(k-j)} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}\sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}(-x)^j \\ &= \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}\left[f(0) - \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(0-x)^{k+1}\right] \\ &= \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k+1} \quad (\xi \text{ 介于 } 0, x \text{ 之间}) \\ &\to \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}, \quad x \to 0.\end{aligned}$$

所以由导数定义和 L'Hôpital 法则，得到

$$F^{(k)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F^{(k-1)}(x) - \frac{f^{(k)}(0)}{k}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{F^{(k)}(x)}{1} = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}.$$

所以数学归纳法知 $F \in \mathscr{C}^n(I)$. □

证明3：.

$$F^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} f^{(j)}(x)\left(\frac{1}{x}\right)^{(k-j)} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}\sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}(-x)^j.$$

由导数定义和 L'Hôpital 法则，得到

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{F^{(k)}(x) - \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}}{x} \\ =&\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^k\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}(-x)^j - \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}}{\frac{x^{k+2}}{k!}} \\ =&\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^k\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(-x)^j + (-1)^{k+1}\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!}(-x)^{j-1} - \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}x^k}{\frac{(k+2)x^{k+1}}{k!}} \\ =&\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^k\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(-x)^k - \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}x^k}{\frac{(k+2)x^{k+1}}{k!}} \\ =&\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k+1)}(x) - f^{(k+1)}(0)}{(k+2)x} \\ =&\frac{f^{(k+2)}(0)}{k+2}.\end{aligned}$$

所以 $F^{(k+1)}(0) = \frac{f^{(k+2)}(0)}{k+2}$.

用这个证明，条件可以减弱为 f 在 $x=0$ 处 $n+1$ 阶可导，结论相应变成 F 在 $x=0$ 处 n 阶可导。 □

例 11. 设 f 是 C^∞ 函数，

$$F(x)=\begin{cases} f(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}), & x\neq 0;\\ f(0), & x=0.\end{cases}$$

求 f 在 $x=0$ 处的带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 展开式。

证明.

$$g(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数，所以 $F=f\circ g$ 也是 $\mathscr{C}^\infty$ 函数。

而

$$|f(g(x))-F(0)|\leq |f'(\xi)||g(x)-0|\leq M\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, 0<|x|\leq 1,$$

又 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=o(x^n), x\to 0$，所以

$$F(x)=f(g(x))=f(0)+o(x^n),\quad x\to 0,$$

由 Peano 余项泰勒公式的唯一性，所以这就是 F 在 $x=0$ 处的 Peano 余项泰勒公式。 □

四、积分因子、微分方程与辅助函数

一元（未知）函数和它的导数满足的恒等式称为**常微分方程**，其中涉及的未知函数的最高的求导次数称为常微分方程的**阶**。

一阶常微分方程即 $F(x,y,y')=0$，其中 y 是以 x 为自变量的一元可微函数。

称函数 $G(x,y)$ 是方程 $F(x,y,y')=0$的一个**积分因子**，如果 $G(x,y)\neq 0$，且存在函数 H 使得

$$G(x,y(x))F(x,y(x),y'(x))=\big(H(x,y(x))\big)'.$$

于是 $y=y(x)$ 是方程 $F(x,y,y')=0$的解当且仅当

$$H(x,y(x))=C,$$

其中 C 是（任意）常数。这样就把微分方程转化为了代数方程 $H(x,y)=0$.

例 12. $\mathrm{e}^{-\lambda x}$ 是微分方程

$$y'-\lambda y=0$$

的积分因子。

证明.

$$\big(\mathrm{e}^{-\lambda x}y\big)'=\mathrm{e}^{-\lambda x}(-\lambda y+y')=0.$$

从而 $y=C\mathrm{e}^{\lambda x}$ 是该微分方程的解。 □

例 13. 求微分方程

$$y' + g'(x)y = 0$$

的积分因子。

解.

$$\left(\mathrm{e}^{g(x)}y\right)' = \mathrm{e}^{g(x)}(g'(x)y + y') = 0.$$

从而 $\mathrm{e}^{g(x)}$ 是该微分方程的积分因子，微分方程的解为 $y = C\mathrm{e}^{-g(x)}$. □

例 14. 设 f, g 可微，满足 $g(x)$ 有界，

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) = 0.$$

证明存在 $\xi > 0$ 使得

$$f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0.$$

解. 令 $F(x) = \mathrm{e}^{g(x)}f(x)$. 则 F 可微，且 $F(0) = F(+\infty) = 0$. 由推广了的 Rolle 定理，存在 $\xi > 0$ 使得

$$F'(\xi) = \left(\mathrm{e}^{g(x)}f(x)\right)'_{x=\xi} = 0.$$

所以

$$f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0.$$

□

例 15. 设 f 可微，满足

$$\lim_{x\to+\infty}[f'(x) + f(x)] = a.$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

解. 记 $F(x) = \mathrm{e}^x f(x)$，$G(x) = \mathrm{e}^x$，则

$$\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to+\infty}[f'(x) + f(x)] = a.$$

另外，$\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$，$G'(x) > 0$，所以

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = a.$$

□