习题讨论课04题目：无穷大量与无穷小量

★号（越）多表示题目（越）难

一、无穷大量与无穷小量，大 O 和小 o 的计算

【有界量】

$x\to a$ 时，$f(x)$ 是有界量，如果存在常数 M 以及 a 的去心邻域 V 使得 $\forall x\in V\cap D_f$，都有 $|f(x)|\le M$ 。

【无穷大量】

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$：对任意 $M>0$，存在 a 的去心邻域 V 使得 $\forall x\in V\cap D_f$，都有 $f(x)>M$ 。

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$：$\lim\limits_{x\to a}(-f(x))=+\infty$ 。

【无穷小量】

拓展：算法复杂度
例：二分法求n次多项式的实根，要求误差不超过伊普西龙
其算法复杂度可表示为T（n，伊普西龙） = O（f（n，伊普西龙）），n趋近于无穷，伊普西龙趋近于0。

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ 。

【大 O 和小 o，阶的比较】

$x\to a$ 时，$f(x)=O(g(x))$：存在 $M>0$ 和 a 的去心邻域 V 使得 $\forall x\in V$，$|f(x)|\le M|g(x)|$，f 受控于 g。等价定义：f/g是有界量

$x\to a$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶：$f(x)=O(g(x))$ 且 $g(x)=O(f(x))$，即存在 $M>0$ 和 a 的去心邻域 V 使得 $\forall x\in V$，$\frac{1}{M}|g(x)|\le|f(x)|\le M|g(x)|$ 。包括同阶无穷大和同阶无穷小

$x\to a$ 时，$f(x)=o(g(x))$：$\forall\varepsilon>0$，存在 a 的去心邻域 V_ε 使得 $\forall x\in V_\varepsilon$，$|f(x)|\le\varepsilon|g(x)|$，即 f 相对于 g 而言很小。等价定义：x趋近于a时，f/g=0

$x\to a$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 等价：$x\to a$ 时，$f(x)=g(x)+o(g(x))$，即 $\forall\varepsilon>0$，存在 a 的去心邻域 V_ε 使得 $\forall x\in V_\varepsilon$，$|f(x)-g(x)|\le\varepsilon|g(x)|$。等价定义：x趋近于a时，f/g=1

【联系】

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \iff x\to a$ 时，$f(x)=o(1)$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\in\mathbb{R} \iff x\to a$ 时，$f(x)=A+o(1)$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \iff x\to a$ 时，$\frac{1}{f(x)}=o(1)$.
$x\to a$ 时，$f(x)$ 是有界量 $\iff f(x)=O(1), x\to a$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\in\mathbb{R} \implies f(x)=O(1), x\to 0$.
无穷小量都是有界量，无穷大量都不是有界量。

例 1 (O 和 o 的运算性质).

o(f)o(g)=o(fg)

指集合中的某个具体函数

$$O(f)+O(f)=O(f),\quad O(f)O(g)=O(fg),$$

指整个O（f）的集合

$$o(f)+o(f)=o(f),\quad O(f)o(g)=o(fg).$$

$$o(f)=O(f).$$

这里的等式的含义是：等号左边的运算结果是等号右边集合中的一个对象。

例 2. （★）证明：若

$$f(x)+o(f(x))=Bg(x)+o(g(x)),\quad x\to a,$$

移至等号右边

则

$$f(x) = Bg(x) + o(g(x)), \quad x \to a.$$

这里之后全部都是o（x），于是得到x=1/A y+o（y），再设o（y）=y u（y）代入原式即得第二步展开。

特别地，若 $B = 1$，则"f 与 g 等价"当且仅当"g 与 f 等价"。

例 3 (**反函数的渐近表达式**). 设 f 有连续的反函数，$f(x) = Ax + Bx^k + o(x^k)$（$A \neq 0$，$k > 1$，$x \to 0$），求 f 的反函数 f^{-1} 在自变量 $y \to 0$ 时的渐近表达式。

例 4 (**有理指数幂函数的渐近展开，Newton的方法，广义二项式展开**). 对正有理数 $\frac{m}{n}$，在 $x \to 0$ 时，把 $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ 做渐近展开。

例 5 (**幂函数的渐近展开，★**). 设 α 为实数，在 $x \to 0$ 时，把 $(1+x)^{\alpha}$ 做渐近展开。

例 6 (**指数函数、对数函数、三角函数、反三角的渐近展开，★**).

1. 记 $u(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x}$. 证明：$u(x) = o(1)$，并且
$$u(2x) - u(x) - \frac{x}{2} = o(x), \quad x \to 0.$$
由此得到
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0.$$

2. 记 $v(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x}$. 证明：$v(x) = o(1)$，并且
$$v(2x) - v(x) + \frac{x}{2} = o(x), \quad x \to 0.$$
由此得到
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0.$$

3. 记 $w(x) = \frac{\sin x - x}{x}$. 证明：$w(x) = o(1)$，并且
$$w(2x) - w(x) + \frac{x^2}{2} = o(x^2), \quad x \to 0.$$
由此得到
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

4.
$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0.$$
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

5.
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad x \to 0.$$

例 7. （★★）设 $\lambda > 1 \geq |A|, \alpha > 0$，当 $x \to 0$ 时，f 是无穷小量且满足

$$f(\lambda x) - Af(x) - Bx^\alpha = o(x^\alpha).$$

证明 $f(x) = \frac{B}{\lambda^\alpha - A}x^\alpha + o\left(x^\alpha\right)$， $x \to 0$ 。

证明. 猜 $f(x) = Cx^\beta + o(x^\beta)$（$C \neq 0$）。代入已知条件，得到

$$C\lambda^\beta x^\beta - ACx^\beta + o(x^\beta) = Bx^\alpha + o(x^\alpha),$$

即

$$C(\lambda^\beta - A)x^\beta + o(x^\beta) = Bx^\alpha + o(x^\alpha).$$

由 f 是无穷小量知 $\beta > 0$，所以 $\lambda^\beta > 1 \geq A$，因此 $C(\lambda^\beta - A) \neq 0$。由例2结论知 $x^\beta = \frac{B}{C(\lambda^\beta - A)}x^\alpha + o(x^\alpha)$. 从而 $f(x) = Cx^\beta + o(x^\beta) = \frac{B}{\lambda^\beta - A}x^\alpha + o(x^\alpha)$.

若 $B = 0$，则 $x^\beta = o(x^\alpha)$，从而 $f(x) = o(x^\alpha)$， $f(x) = \frac{B}{\lambda^\alpha - A}x^\alpha + o(x^\alpha)$.

若 $B \neq 0$，则 $\beta = \alpha$，此时也成立 $f(x) = \frac{B}{\lambda^\alpha - A}x^\alpha + o(x^\alpha)$. □

找出上述证明中的问题。

例 8. （★）求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$.

换元换分子，换元将x趋近于1换成m趋近于0，等号两边同时展开，分类讨论

例 9. （★★）求单侧极限 $\lim\limits_{x \to 1^\pm} \dfrac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}}{x - 1}$.

二、极限的综合练习

例 10. 求

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}\right)$$

例 11. 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}$.

例 12. 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln\left(\cos \frac{1}{x}\right)$.

例 13. 求 $\lim\limits_{x \to 0} (2\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

例 14. （★）求 $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

例 15. 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 求参数 p 的值，使得 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p\left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\right)$ 为非零实数，并求这个极限的值。

例 16. 比较 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$， $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ 作为 e 的误差。

化为以e为底的指数函数，可得其余项，阿尔法=1/2时特殊（与1/n或1/n平方同级别）

从（n+1）！开始提取公因式，提取后只保留后两项裂项放缩，可得其余项与（1/n！）同级别