习题讨论课04答案：无穷大量与无穷小量

★号（越）多表示题目（越）难

一、无穷大量与无穷小量，大 O 和小 o 的计算

【有界量】

$x \to a$ 时, $f(x)$ 是有界量, 如果存在常数 M 以及 a 的去心邻域 V 使得 $\forall x \in V \cap D_f$, 都有 $|f(x)| \leq M$ 。

【无穷大量】

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$: 对任意 $M > 0$, 存在 a 的去心邻域 V 使得 $\forall x \in V \cap D_f$, 都有 $f(x) > M$ 。

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$: $\lim\limits_{x\to a}(-f(x)) = +\infty$ 。

【无穷小量】

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ 。

【大 O 和小 o ，阶的比较】

$x \to a$ 时, $f(x) = O(g(x))$: 存在 $M > 0$ 和 a 的去心邻域 V 使得 $\forall x \in V$, $|f(x)| \leq M|g(x)|$，f 受控于 g。

$x \to a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶: $f(x) = O(g(x))$ 且 $g(x) = O(f(x))$, 即存在 $M > 0$ 和 a 的去心邻域 V 使得 $\forall x \in V$，$\frac{1}{M}|g(x)| \leq |f(x)| \leq M|g(x)|$ 。

$x \to a$ 时, $f(x) = o(g(x))$: $\forall \varepsilon > 0$ ，存在 a 的去心邻域 V_ε 使得 $\forall x \in V_\varepsilon$, $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$，即 f 相对于 g 而言很小。

$x \to a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价: $x \to a$ 时, $f(x) = g(x) + o(g(x))$, 即 $\forall \varepsilon > 0$，存在 a 的去心邻域 V_ε 使得 $\forall x \in V_\varepsilon$，$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$。

【联系】

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \iff x \to a$ 时, $f(x) = o(1)$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \iff x \to a$ 时, $f(x) = A + o(1)$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \iff x \to a$ 时, $\frac{1}{f(x)} = o(1)$.
$x \to a$ 时，$f(x)$ 是有界量 $\iff f(x) = O(1), x \to a$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(x) = O(1), x \to 0$.
无穷小量都是有界量, 无穷大量都不是有界量。

例 1 (O 和 o 的运算性质).

$$O(f) + O(f) = O(f), \quad O(f)O(g) = O(fg),$$
$$o(f) + o(f) = o(f), \quad O(f)o(g) = o(fg).$$
$$o(f) = O(f).$$

这里的等式的含义是: 等号左边的运算结果是等号右边集合中的一个对象。

证明. (1) 设 $g_1, g_2 \in O(f)$. 则存在常数 M_1, M_2 以及 a 的去心邻域 W 使得 $\forall x \in W$，

$$|g_1(x)| \leq M_1|f(x)|, \quad |g_2(x)| \leq M_2|f(x)|.$$

于是

$$|g_1(x)+g_2(x)| \le |g_1(x)|+|g_2(x)| \le M_1|f(x)|+M_2|f(x)| = (M_1+M_2)|g(x)|.$$

所以 $g_1+g_2=O(f)$.

(2) 设 $u\in O(f)$，$v\in o(g)$. 则存在常数 M 以及 a 的去心邻域 W_1 使得 $\forall x\in W_1$，

$$|u(x)|\le M|f(x)|.$$

对任意 $\varepsilon>0$，存在 a 的去心邻域 W_2 使得 $\forall x\in W_2$，

$$|v(x)|\le \varepsilon|g(x)|.$$

于是对任意 $x\in W_1\cap W_2$，

$$|u(x)v(x)|\le M|f(x)|\cdot\varepsilon|g(x)|\le M\varepsilon|f(x)g(x)|.$$

所以 $uv=o(fg)$. □

例 2. （★）证明：若

$$f(x)+o(f(x))=Bg(x)+o(g(x)),\quad x\to a,$$

则

$$f(x)=Bg(x)+o(g(x)),\quad x\to a.$$

特别地，若 $B=1$，则“f 与 g 等价”当且仅当“g 与 f 等价”。

证明. (1) 设 $f(x)+o(f(x))=Bg(x)+o(g(x)),\quad x\to a.$

因此对任意 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, 存在 a 的去心邻域 V_ε，使得 $\forall x\in V_\varepsilon$， $|o(f(x))|\le\varepsilon|f(x)|$，$|o(g(x))|\le\varepsilon|g(x)|$. 于是

$$|f(x)|=|Bg(x)+o(g(x))-o(f(x))|\le|B||g(x)|+\frac{1}{2}|g(x)|+\frac{1}{2}|f(x)|,$$

从而

$$|f(x)|\le(2|B|+1)|g(x)|.$$

因此

$$|f(x)-Bg(x)|\le\varepsilon|g(x)|+\varepsilon|f(x)|\le\varepsilon(2|B|+2)|g(x)|.$$

即 $f(x)=Bg(x)+o(g(x)),\quad x\to a.$

(2) 若 $f(x)=g(x)+o(g(x))$，则 $f=f+0=f+o(f)$，于是由(1)知，$g(x)=f(x)+o(f(x))$. □

例 3 (反函数的渐近表达式). 设 f 有连续的反函数，$f(x)=Ax+Bx^k+o(x^k)$（$A\ne0$，$k>1$，$x\to0$），求 f 的反函数 f^{-1} 在自变量 $y\to0$ 时的渐近表达式。

证明. $y = f(x) = Ax + Bx^k + o(x^k) = Ax + o(Ax), x \to 0$，于是从而由例2的结论知

$$x = \frac{1}{A}y + o(y), \quad y \to 0.$$

记 $x = \frac{1}{A}y + yu(y)$. 则

$$\begin{aligned} y &= A\left(\frac{1}{A}y + yu(y)\right) + B(\frac{1}{A}y + yu(y))^k + o\left(\left(\frac{1}{A}y + yu(y)\right)^k\right) \\ &= y + Ayu(y) + \frac{B}{A^k}y^k + o(y^k) \end{aligned}$$

因此

$$u(y) = -\frac{B}{A^{k+1}}y^{k-1} + o(y^{k-1}),$$

从而

$$x = \frac{1}{A}y - \frac{B}{A^{k+1}}y^k + o(y^k).$$

□

例 4 (有理指数幂函数的渐近展开，Newton的方法，广义二项式展开). 对正有理数 $\frac{m}{n}$，在 $x \to 0$ 时，把 $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ 做渐近展开。

证明. 记 $(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + u(x)$，则 $x \to 0$ 时, $u(x) \to 0$ 是无穷小量。在恒等式

$$(1+x)^m = (1+u(x))^n$$

两边用二项式展开

$$1 + mx + o(x) = 1 + nu(x) + o(u(x)),$$

所以 $u(x) + o(u(x)) = \frac{m}{n}x + o(x)$，于是由上例结论得到

$$u(x) = \frac{m}{n}x + o(x), \quad x \to 0.$$

记 $u(x) = \frac{m}{n}x + xv(x)$，则 $v(x)$ 是无穷小量,

$$(1+x)^m = \left(1 + \frac{m}{n}x + xv(x)\right)^n$$

两边展开得到

$$\begin{aligned} 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + o\left(x^2\right) &= \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^n + n\left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{n-1}xv(x) + o(x^2) \\ &= 1 + mx + \frac{n(n-1)}{2}\frac{m^2}{n^2}x^2 + nv(x) + o\left(x^2\right), \end{aligned}$$

于是

$$v(x) = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n} - 1\right)}{2}x^2 + o\left(x^2\right),$$

所以

$$(1+x)^{\frac{m}{n}}=1+\frac{m}{n}x+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}x^2+o\left(x^2\right).$$

牛顿曾用类似办法得到了广义二项式（对有理数 μ ）

$$(1+x)^\mu=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3+\cdots.$$

当 $\frac{m}{n}=-1$ 时, 广义二项式可以如下得到

$$\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots.$$

事实上，

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^N+\frac{x^{N+1}}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^N+O\left(x^{N+1}\right),\quad x\to 0.$$

□

例 5 (**幂函数的渐近展开，★**)**.** 设 α 为实数，在 $x\to 0$ 时，把 $(1+x)^\alpha$ 做渐近展开。

解. 我们已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1-\alpha x}{x}=0$.

设 $u(x)=\frac{(1+x)^\alpha-1-\alpha x}{x}$. 则 $u(x)=o(1), x\to 0$.

$$(1+2x)^\alpha=\left[(1+x)^2-x^2\right]^\alpha=\left((1+x)^\alpha\right)^2\left(1-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^\alpha.$$

所以

$$\begin{aligned}1+\alpha\cdot 2x+2xu(2x)&=(1+\alpha x+xu(x))^2\cdot\\&\qquad\left(1-\frac{\alpha x^2}{(1+x)^2}-\frac{x^2}{(1+x)^2}u\left(-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)\right)\\&=(1+2\alpha x+2xu(x)+\alpha^2x^2+o(x^2))(1-\alpha x^2+o(x^2))\\&=1+2\alpha x+2xu(x)+\alpha(\alpha-1)x^2+o(x^2),\quad x\to 0.\end{aligned}$$

所以

$$u(2x)-u(x)-\frac{\alpha(\alpha-1)x}{2}=o(x),\quad x\to 0.$$

猜测 $u(x)=Ax^\beta+o(x^\beta)$，代入得到

$$A(2x)^\beta+o(x^\beta)-Ax^\beta-o(x^\beta)=\frac{\alpha(\alpha-1)x}{2}+o(x),$$

即

$$(2^\beta-1)Ax^\beta+o(x^\beta)=\frac{\alpha(\alpha-1)x}{2}+o(x).$$

两边比较，得到 $\beta=1$，$A=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$.

$$u(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)x}{2}+o(x),$$

从而

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2).$$

□

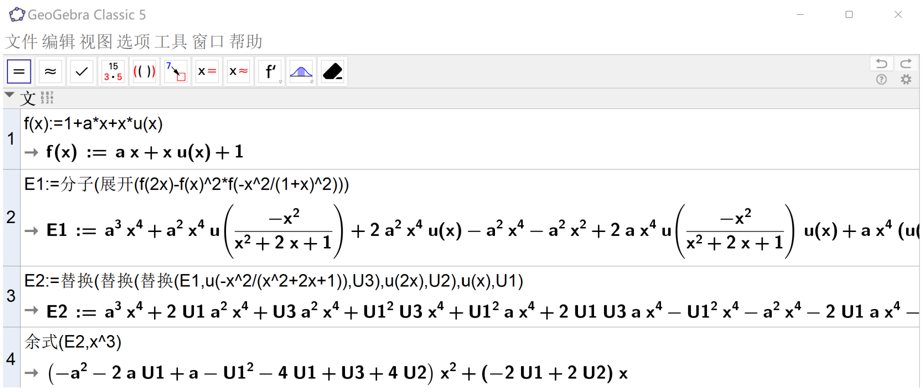

图 1: 用 GeoGebra CAS 推导 $(1+x)^\alpha$ 的渐近展开

上述计算表明：若 $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + xu(x)$，则

$$\begin{aligned} 0 &= (1+2x)^\alpha - ((1+x)^\alpha)^2\left(1-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^\alpha \\ &= x[2u(2x) - 2u(x) - \alpha(\alpha-1)x + o(x)]. \end{aligned}$$

即 $u(2x) - u(x) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x = o(x)$.

如果希望得到更进一步展开，那么应该使用数学软件来协助我们进行这些常规但繁琐的计算。

例 6 (**指数函数、对数函数、三角函数、反三角的渐近展开，★**).

1. 记 $u(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x}$. 证明：$u(x) = o(1)$，并且

$$u(2x) - u(x) - \frac{x}{2} = o(x), \quad x \to 0.$$

由此得到

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0.$$

2. 记 $v(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x}$. 证明：$v(x) = o(1)$，并且

$$v(2x) - v(x) + \frac{x}{2} = o(x), \quad x \to 0.$$

由此得到

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0.$$

3. 记 $w(x)=\frac{\sin x - x}{x}$. 证明：$w(x)=o(1)$，并且

$$w(2x)-w(x)+\frac{x^2}{2}=o(x^2),\quad x\to 0.$$

由此得到

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\quad x\to 0.$$

4.

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3),\quad x\to 0.$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\quad x\to 0.$$

5.

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4),\quad x\to 0.$$

证明. (1) $\mathrm{e}^{2x}=(\mathrm{e}^x)^2$. 所以

$$1+2x+2xu(2x)=(1+x+xu(x))^2=1+2x+x^2+2xu(x)+x^2(2u(x)+u(x)^2),$$

于是

$$u(2x)-u(x)-\frac{x}{2}=o(x),\quad x\to 0.$$

由此猜得 $u(x)=\frac{x}{2}+o(x)$.

(2) $\ln(1+2x)=2\ln(1+x)+\ln\left(1-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)$. 于是

$$2x+2xv(2x)=2(x+xv(x))-\frac{x^2}{(1+x)^2}-\frac{x^2}{(1+x)^2}v\left(\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)$$

因此

$$v(2x)-v(x)+\frac{x}{2}=o(x),\quad x\to 0.$$

由此猜得 $v(x)=-\frac{x}{2}+o(x)$.

方法2：利用(1)的结论和例3中关于反函数渐近展开的结论。

$$y=\mathrm{e}^x-1=x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

所以

$$x=\ln(1+y)=y-\frac{1}{2}y^2+o(y^2).$$

(3) $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}}$. 于是

$$\begin{aligned}2x+2xw(2x)&=2(x+xw(x))\left(1-(x+xw(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=(2x+2xw(x))\left[1-\frac{1}{2}(x+xw(x))^2+o(x^2)\right]\\&=2x+2xw(x)-x^3+o(x^3),\end{aligned}$$

从而
$$w(2x)-w(x)+\frac{1}{2}x^2=o(x^2),\quad x\to 0.$$
由此猜得 $w(x)=-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)$.

(4) 由(3)和反函数渐近展开即可。

(5)
$$\begin{aligned}\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}&=\left(1-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=1+\frac{1}{2}(-1)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}(x+o(x))^4+o(x^4)\\&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{6}-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\\&=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\end{aligned}$$
□

下面这个习题回答了上例中的那些猜测。

例 7. （★★）设 $\lambda>1\geq|A|,\alpha>0$，当 $x\to 0$ 时，f 是无穷小量且满足
$$f(\lambda x)-Af(x)-Bx^\alpha=o(x^\alpha).$$
证明 $f(x)=\frac{B}{\lambda^\alpha-A}x^\alpha+o\left(x^\alpha\right),\quad x\to 0$ 。

证明. 猜 $f(x)=Cx^\beta+o(x^\beta)$（$C\neq 0$）。代入已知条件，得到
$$C\lambda^\beta x^\beta-ACx^\beta+o(x^\beta)=Bx^\alpha+o(x^\alpha),$$
即
$$C(\lambda^\beta-A)x^\beta+o(x^\beta)=Bx^\alpha+o(x^\alpha).$$
由 f 是无穷小量知 $\beta>0$，所以 $\lambda^\beta>1\geq A$，因此 $C(\lambda^\beta-A)\neq 0$。由例2结论知 $x^\beta=\frac{B}{C(\lambda^\beta-A)}x^\alpha+o(x^\alpha)$. 从而 $f(x)=Cx^\beta+o(x^\beta)=\frac{B}{\lambda^\beta-A}x^\alpha+o(x^\alpha)$.

若 $B=0$，则 $x^\beta=o(x^\alpha)$，从而 $f(x)=o(x^\alpha)$，$f(x)=\frac{B}{\lambda^\alpha-A}x^\alpha+o(x^\alpha)$.

若 $B\neq 0$，则 $\beta=\alpha$，此时也成立 $f(x)=\frac{B}{\lambda^\alpha-A}x^\alpha+o(x^\alpha)$. □

找出上述证明中的问题。

正确的证明. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对任意 $0<|x|<\delta$，
$$-\varepsilon|x|^\alpha<f(\lambda x)-Af(x)-Bx^\alpha<\varepsilon|x|^\alpha,$$
对任意正整数 k， $0<\left|\lambda^{-(k-1)}x\right|\leq|x|<\delta$，从而
$$\left|A^{k-1}f\left(\lambda^{-(k-1)}x\right)-A^kf\left(\lambda^{-k}x\right)-BA^{k-1}\left(\lambda^{-k}x\right)^\alpha\right|<\varepsilon|A|^{k-1}\left|\lambda^{-k}x\right|^\alpha,$$

相加得到

$$\left|f(x)-A^N f\left(\lambda^{-N}x\right)-\frac{B}{\lambda^\alpha}x^\alpha\left(1+\frac{A}{\lambda^\alpha}+\cdots+\left(\frac{A}{\lambda^\alpha}\right)^{N-1}\right)\right|$$
$$\leq \varepsilon|x|^\alpha\frac{1}{\lambda^\alpha}\left(1+\frac{|A|}{\lambda^\alpha}+\cdots+\left(\frac{|A|}{\lambda^\alpha}\right)^{N-1}\right),$$

让 $N\to+\infty$ 得到

$$\left|f(x)-\frac{B}{\lambda^\alpha}x^\alpha\frac{1}{1-\frac{A}{\lambda^\alpha}}\right|\leq\frac{1}{\lambda^\alpha}\frac{\varepsilon|x|^\alpha}{1-\frac{A}{\lambda^\alpha}}.$$

即

$$f(x)=\frac{B}{\lambda^\alpha-A}x^\alpha+o\left(x^\alpha\right),\quad x\to 0.$$

□

你是否能用上述方法求幂指对三角函数更进一步的渐近展开式?

例 8. （★）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$.

解法1. 因为 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$. □

注：请找出解法1的错误。重要提示: 在进行等价无穷小代换时, 永远使用 $f(x)=g(x)+o(g(x))$, 而不要简单用 $g(x)$ 代替 $f(x)$!!!

解法2. 记 $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$. 则由极限的换元法（复合函数极限）

$$L=\lim_{y\to 0}\frac{\tan(2y)-(2y)}{(2y)^3}=\frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}\tan 2y-y}{y^3}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\tan 2x-x}{x^3}.$$

所以

$$\begin{aligned}4L-L&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan x(1-\tan^2 x)}{x^3(1-\tan^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3 x}{x^3(1-\tan^2 x)}\\&=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\right)^3\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\tan^2 x}=1,\end{aligned}$$

所以 $L=\frac{1}{3}$. □

注：请找出解法2中的错误。模仿解法2，求极限 $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$. 则

$$\frac{1}{2}L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}=L,$$

所以 $L-\frac{L}{2}=0$，从而 $L=0$.

解法 2 基于这样的前提假设：极限 $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$ 存在且为有限值。这本身是需要证明的，但是不能靠解法 2 的结论 $L=\frac{1}{3}$ 来解释，否则就是循环论证。

解法3.

$$\begin{aligned}\frac{\tan x - x}{x^3} &= \frac{\sin x - x\cos x}{x^3\cos x}\\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^3(1+o(1))}\\ &= \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{1+o(1)} \to \frac{1}{3}, \quad x \to 0.\end{aligned}$$

□

注: 在解法3中，分子和分母中都出现了 $\cos x$，却使用了不同形式的渐进展开。为什么？在乘法中，因子的主项决定乘积的主项。但在加减法中，求和项的主项未必决定最终结果的主项，所以需要展开到更高一些的阶数。

解法4. 设 $\tan x = x + u(x)$. 则

$$\sin x = [x + u(x)]\cos x,$$

所以

$$x + o(x) = [x + u(x)][1 + o(1)],$$

展开化简得到

$$u(x) + o(u(x)) = o(x).$$

由此得到

$$u(x) = o(x).$$

故可设 $u(x) = xv(x)$，其中 $v(x) = o(1)$.

由

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

得到

$$2x + 2xv(2x) = \frac{2x + 2xv(x)}{1 - (x + xv(x))^2},$$

即

$$\begin{aligned}2x + 2xv(x) &= [2x + 2xv(2x)][1 - (x + xv(x))^2]\\ &= 2x + 2xv(2x) - 2x^3(1 + v(2x))(1 + v(x))^2\\ &= 2x + 2xv(2x) - 2x^3 + o(x^3),\end{aligned}$$

化简得到

$$v(2x) - v(x) - x^2 = o(x^2),$$

从而

$$v(x) = \frac{1}{3}x^2 + o(x^2).$$

因此
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$
于是
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$
$\square$

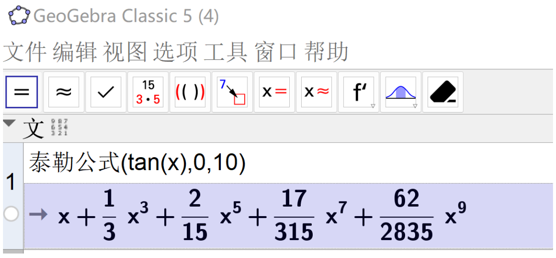

图 2: 用 GeoGebra CAS 计算 tan 的渐近展开式

注: 将来我们学习了 Taylor 公式以后, 可以更方便地得到很多函数的渐近展开。

例 9. （★★）求单侧极限 $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}}\dfrac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}}{x-1}$.

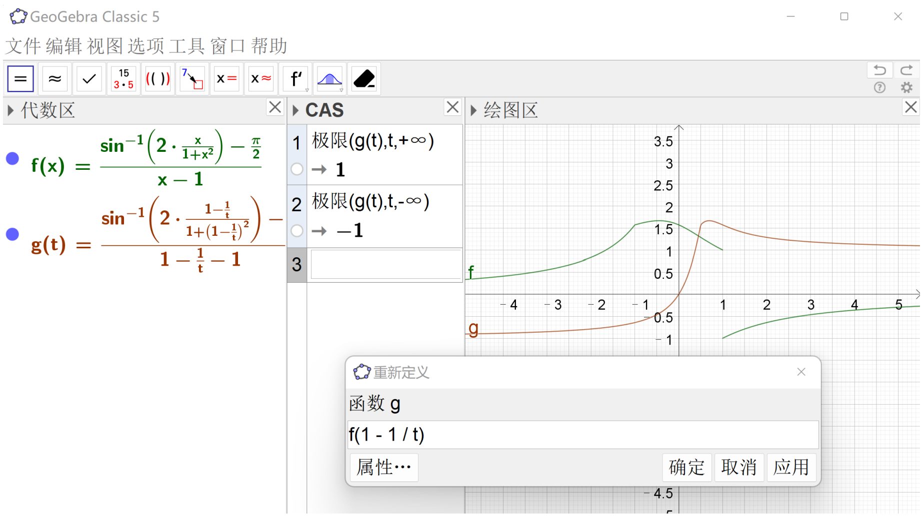

图 3: 用 GeoGebra CAS 计算单侧极限

解. 我们只求 $\lim\limits_{x\to 1^{-}}\dfrac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}}{x-1}$，另一个留作练习。

记 $h=1-x$，$t=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\in[0,\pi]$，则 $h\to 0^+$ 当且仅当 $x\to 1^-$，

$$\cos t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2(1-h)}{1+(1-h)^2}=\frac{1}{1+\frac{h^2}{2(1-h)}}\to 1. \qquad (*)$$

于是 $t=\arccos\frac{2(1-h)}{1+(1-h)^2}\to 0^+$. (*)式两边展开得到

$$1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)=1-\frac{h^2}{2-2h}+o(h^2)=1-\frac{h^2}{2}+o(h^2),$$

所以由例2结论知

$$t^2=h^2+o(h^2),$$

从而

$$t=\sqrt{h^2+o(h^2)}=h\sqrt{1+o(1)}=h(1+o(1)),$$

所以

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}}{x-1}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-t}{-h}=1.$$

□

二、极限的综合练习

例 10. 求

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$$

解. 分离出主项，然后渐近展开

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}&=x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\\&=x\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\left(1-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\&=\frac{4}{3}+o(1)\to\frac{4}{3},\quad x\to+\infty.\end{aligned}$$

□

例 11. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}$.

解.

$$\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}=\frac{\tan x+o(\tan x)}{\sin x+o(\sin x)}=\frac{x+o(x)}{x+o(x)}\to 1.$$

□

例 12. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)$.

解.

$$x^2\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\cos t}{t^2}=\frac{\ln(1-\frac{t^2}{2}+o(t)^2)}{t^2}=\frac{-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^2}\to-\frac{1}{2}.$$

□

例 13. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

解.

$$\begin{aligned}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}&=\exp\left(\frac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}\right)=\exp\left(\frac{\ln(1+2x+o(x))}{x}\right)\\&=\exp\left(\frac{2x+o(x)}{x}\right)=\exp(2+o(1))\to\mathrm{e}^2.\end{aligned}$$

□

例 14. （★）求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

解.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}&=\exp\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\right)\\&=\exp\left(n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-n\right)\\&=\exp\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)\to\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.\end{aligned}$$

□

例 15. 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$. 求参数 p 的值，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)$ 为非零实数，并求这个极限的值。

解法1. 令 $t=\frac{1}{x}$. 则

$$\begin{aligned}&x^p\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)\\=&\frac{1}{t^p}\left(\mathrm{e}^{t\ln a}-\mathrm{e}^{\frac{t\ln a}{1+t}}\right)\\=&\frac{1}{t^p}\left(1+t\ln a+\frac{t^2(\ln a)^2}{2}+o(t^2)-1-\frac{t\ln a}{1+t}-\frac{1}{2}\left(\frac{t\ln a}{1+t}\right)^2+o(t^2)\right)\\=&\frac{1}{t^p}\left(t\ln a+\frac{t^2(\ln a)^2}{2}+o(t^2)-t(1-t)\ln a-\frac{1}{2}(t\ln a)^2+o(t^2)\right)\\=&\frac{\ln a+o(1)}{t^{p-2}},\end{aligned}$$

所以 $p=2$，并且上述极限为 $\ln a$. □

解法2.

$$x^p a^{\frac{1}{x+1}}\left(a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)=x^p(1+o(1))\left[(\ln a)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+o\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\right]$$

$$=(\ln a)\frac{x^p}{x(x+1)}+o\left(\frac{x^p}{x(x+1)}\right)\to\begin{cases}\ln a, & 若\ p=2;\\ 0, & 若\ p<2;\\ \infty, & 若\ p>2.\end{cases}$$

□

例 16. 比较 $(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}$，$\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ 作为 e 的误差。

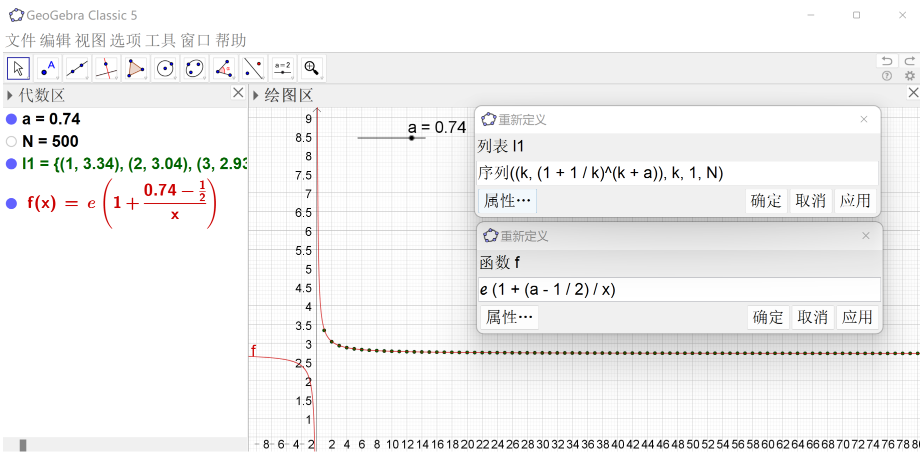

图 4: 用 GeoGebra 绘制 $(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}$ 的渐近展开

解.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}&=\exp\left((n+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\exp\left((n+\alpha)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\&=\exp\left(1+\frac{1}{n}(\alpha-\frac{1}{2})+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=\mathrm{e}\left(1+\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

所以当 $\alpha\neq\frac{1}{2}$ 时，$(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}-\mathrm{e}$ 与 $\frac{1}{n}$ 同阶。当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，$(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}-\mathrm{e}$ 是比 $\frac{1}{n}$ 更高阶的无穷小。

因此在形如 $(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}$ 的数列中，$(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}$ 是收敛效率最高的一个。

可以证明 $(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}$ 的误差是 $\frac{1}{n^2}$ 阶的，所以它的收敛效率远不如数列 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$，后者的误差不超过 $\frac{2}{(n+1)!}$（见第3次习题课第17题）. □