实数集的5大性质：

1、确界原理

2、单调有界收敛原理

3、有界闭区间套定理

4、列紧性定理

5、Cauchy收敛准则

附：重要性质-压缩不动点定理

习题讨论课03题目：极限与实数的重要性质

★号（越）多表示题目（越）难

一、单调性与极限

【单调有界收敛】

- 设数列 $\{a_n\}$ 单调不减。则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ 当且仅当 $\{a_n\}$ 有上界且 $A = \sup\limits_{n\geq 1} a_n$ 。
- 设函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 单调不减，则 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$ 当且仅当 f 在 (a,b) 上有上界且 $A = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ 。
- 对单调不增有类似结论。

例 1. 设 f 是区间 I 上的单调函数。

1. 证明 f 在区间 I 内的间断点都是跳跃间断点。 证明对任意内点x0，左右极限都存在，再讨论是否相等
2. 证明 f 至多只有可数无穷多个间断点。 建立间断点处所在区间与有理数集的一一对应

   虽然有无穷多个，但是可以一一列举出来（如自然数集、有理数集，实数集不可数）
3. 证明 f 连续当且仅当 $f(I)$ 是区间。 区间定义+反证法
4. 若进一步，f 严格单调，$f(I)$ 是区间，证明 f 有连续的反函数。 上一题结论

注. (反三角函数的存在性和连续性) 由于在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上 sin 连续且严格增（见第2次习题课解答），所以在该区间中 sin 的值域为 $[-1,1]$，并且它有连续的反函数 $\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. 同理，在区间 $[0,\pi]$ 上 cos 有连续的反函数 $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$.

可以证明 $\tan=\frac{\sin}{\cos}$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上连续且严格增。又因为对任意正整数 n，

$$\tan\left(\arcsin\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\right)=n,$$

且 tan 是奇函数，所以 $[-n,n]$ 中的实数都是 tan 的函数值。从而 tan 的值域为 $\mathbb{R}$。于是 tan 有连续的反函数 $\arctan:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

根据例1结论，不存在这样的单调函数，它在所有无理数处间断。但以下例题表明存在单调函数，它恰在所有有理数处间断。

例 2. （★★★）设 a_n 是数列

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},-\frac{1}{1},\frac{2}{1},-\frac{2}{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{1},-\frac{3}{1},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{1},-\frac{4}{1},\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\cdots \qquad (*)$$

记

$$I_n(x)=\begin{cases}1, & 若\ a_n\leq x;\\ 0, & 否则,\end{cases}$$

对正整数 N, 记

$$f_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}I_n(x).$$

证明:

1. 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 极限 $f(x)=\lim\limits_{N\to+\infty}f_N(x)$ 存在。
2. f 在 $\mathbb{R}$ 上严格增。
3. f 在每个有理数处间断, 在所有无理数处连续。

压缩不动点：对应关系不断作用于函数值

例 3. 设 $x>0$, 记

$$y_n=\frac{y_{n-1}}{2}+\frac{x}{2y_{n-1}},\quad n=1,2,\ldots.$$

证明对任意 $y_0>0$, 数列 y_n 收敛到 $\sqrt{x}$ 。

单调收敛性：从y1开始单调不增且有下界，再求解极限

例 4. 设 $0\le x\le 1$ 。记 $y_0=0$,

$$y_n=y_{n-1}+\lambda\left(x-y_{n-1}^2\right),\quad n\ge 1.$$

求正数 λ 的值, 使得数列 y_n 是单调不减数列; 此时, 证明数列 y_n 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$ 的值。

ok

例 5. 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 严格增、连续。证明对任何 $x_0\in[0,1]$, 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}f^n(x_0)$ 存在, 且极限值 x^* 满足 $f(x^*)=x^*$ 。

ok

例 6. 在习题课 1 中我们证明了

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

所以数列 $(1+\frac{1}{n})^n$ 单调增, 有上界 $(1+\frac{1}{1})^{1+1}=4$; 数列 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 单调减, 有下界 $(1+\frac{1}{1})^1=2$ 。所以极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

存在。易见它们相等, 记它们的共同的值为 e, 记 $\ln=\log_{\mathrm{e}}$ 。于是

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

从而

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

利用以上事实, 证明数列

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

收敛。

ok

例 7. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ 。

例 8. 设 $x_1=a>0, y_1=b>0,$

单调有界必收敛 或
有界闭区间套

$$x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},\quad y_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}.$$

每次取n+1，x与y的距离
缩小至上一级的1/2以内
，因此二者可趋近于零

证明 $\{x_n\},\{y_n\}$ 都收敛, 且极限相等。

例 9 (指数函数的一种定义，只涉及乘方，★). 对任何实数 x，定义 $E_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. 证明：

1. 当 $n>-x$ 时，$E_n(x)$ 关于 n 严格增；
2. $E_n(x)$ 关于 n 有上界；
3. $E(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}E_n(x)$ 收敛于正数，$E(1)=\mathrm{e}>1$；
4. 对任意实数 x，$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^n=1$；
5. 对任意实数 x,y，$E(x)E(y)=E(x+y)$；
6. $E(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $E(x)$ 到处连续；
7. $E(x)$ 关于 x 严格增；
8. E 的值域为 $(0,+\infty)$.

二、有界闭区间套

$$[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]\supset\cdots$$

等价的

$$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le a_{n+1}\le\cdots\le b_{n+1}\le b_n\le\cdots\le b_2\le b_1,$$

于是存在极限 $\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sup\limits_{n\ge1}a_n, \beta=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\inf\limits_{n\ge1}b_n$ 。于是

$$[\alpha,\beta]=\bigcap_{n\ge1}[a_n,b_n].$$

若进一步, $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$, 则 $\alpha=\beta$, 此时

$$\bigcap_{n\ge1}[a_n,b_n]=\{\alpha\}.$$

例 10. （★）设 $0<\lambda<1$ 。 $x_1=a, x_2=b, x_{n+2}=(1-\lambda)x_n+\lambda x_{n+1}$ 。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在, 并求它的值。

同第8题

用从左往右和从右往左
靠近时每一级缩小的范
围之比相同得出极限值
与区间两端的比值

例 11 (导数与函数单调性，★★). 设 f 在开区间 I 上可导，即对任意 $x \in I$，极限

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

二分法+反证法，
将割线化为切线

存在。证明：若对任意 $x \in I$，都有 $f'(x) > 0$，则 f 在区间 I 上严格增。

二、 Cauchy 准则

【定义】 $\{a_n\}$ 是一个 **Cauchy 数列**: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N 使得对任意正整数 $m, n \geq N, |a_m - a_n| < \varepsilon$。

与极限概念相似: 是数列尾巴上的项的性质;

与极限概念不同: 这是用数列自身的项进行比较。

【性质】任何收敛数列都是 Cauchy 数列。(直接从定义简单得到)

在实数集中，任何 Cauchy 数列都是收敛的。(这是 Cauchy 准则的本质内容，它并不平凡, 因为这在有理数范围内不成立。)

例 12 (压缩不动点定理，★). 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是闭集 (即 I 中任何收敛数列, 其极限也在 I 中), $f : I \to I$ 是压缩映射, 即存在常数 $0 < \lambda < 1$ 使得对任意 $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|.$$

则存在唯一的 $x^* \in I$ 使得 $f(x^*) = x^*$, 且对任意 $x_0 \in I$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f^n(x_0) = x^*$, 且

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\lambda^n |f(x_0) - x_0|}{1 - \lambda}, \quad \forall n \geq 1.$$

例 13. 例3, 用压缩不动点定理。

例 14. （★）例 4, $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq 1$, 用压缩不动点。

例 15. （★）设 $0 < \lambda < 1, y_{n+1} = \frac{1-\lambda}{y_n} + \lambda$ 。证明 $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ 存在, 并求它的值。

例 16. （★）每一种收敛都对应一种 Cauchy 准则。试写出极限 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 收敛所对应的 Cauchy 准则，并给以证明。

例 17. （★）设 $I \subseteq \mathbb{R}$，$f : I \to \mathbb{R}$. 证明：f 在 I 上连续且所有间断点都是可去间断点当且仅当对于 I 中的任意 Cauchy 数列 x_n，$f(x_n)$ 都是 Cauchy 数列。

ok

例 18. 证明收敛

$$a_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

e

收敛，并估计 $A = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ 的值。

例 19 (指数函数的另一种定义方式，复数指数，★★). 对复数 $z \in \mathbb{C}$，定义

$$E_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!}.$$

证明：

1. $E_n(z)$ 关于 n 是 Cauchy 列，从而存在极限 $E(z) = \lim\limits_{n \to +\infty} E_n(z)$；
2. 对任意 $z, w \in \mathbb{C}$，

$$\begin{aligned} &|E_{2n+1}(z)E_{2n+1}(w) - E_{2n+1}(z+w)| \\ &\qquad \le E_{n+1}(|z|)\,|E_{2n+1}(|w|) - E_{n+1}(|w|)| \\ &\qquad\qquad + E_{n+1}(|w|)\,|E_{2n+1}(|z|) - E_{n+1}(|z|)|, \end{aligned}$$

   从而 $E(z)E(w) = E(z+w)$.

3. 对 $|z| < 1$，$|E(z) - 1| \le 2|z|$；
4. $E(z)$ 对 $z \in \mathbb{C}$ 连续；
5. $E(1) = \mathrm{e}$.

证明留作练习。

例 20. （★）(1) 设数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 满足：对任意正整数 n, p，都有 $|x_{n+p} - x_n| \le \frac{p}{n^2}$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛？

（★★）(2) 设 $\beta > 0$，数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 满足：对任意正整数 n, p，都有 $|x_{n+p} - x_n| \le \frac{p}{n^{1+\beta}}$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛？

（★★★）(3) 如果数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 满足：对任意正整数 n, p，都有 $|x_{n+p} - x_n| \le \frac{p}{n}$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛？

请证明你的结论。