

习题讨论课03答案：极限与实数的重要性质

★号（越）多表示题目（越）难

一、单调性与极限

【单调有界收敛】

- 设数列 $\{a_n\}$ 单调不减。则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$ 当且仅当 $\{a_n\}$ 有上界且 $A = \sup_{n \geq 1} a_n$ 。
- 设函数 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 单调不减, 则 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$ 当且仅当 f 在 (a, b) 上有上界且 $A = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$ 。
- 对单调不增有类似结论。

例 1. 设 f 是区间 I 上的单调函数。

1. 证明 f 在区间 I 内的间断点都是跳跃间断点。
2. 证明 f 至多只有可数无穷多个间断点。
3. 证明 f 连续当且仅当 $f(I)$ 是区间。
4. 若进一步, f 严格单调, $f(I)$ 是区间, 证明 f 有连续的反函数。

证明. 不妨设 f 单调不减。

(1) 对 I 的任何内点 x_0 , 任取 $x_1, x_2 \in I$ 使得 $x_1 < x_0 < x_2$, 则 $f(x_1) \leq f(x_0) \leq f(x_2)$ 。

因此 $\alpha = \sup_{x \in I, x < x_0} f(x)$, $\beta = \inf_{x \in I, x > x_0} f(x)$ 存在, 并且 $\alpha \leq f(x_0) \leq \beta$ 。

任取 $\varepsilon > 0$, $\alpha - \varepsilon$ 不是 $\{f(x) \mid x \in I, x < x_0\}$ 的上界, 从而存在 $x_3 \in I, x_3 < x_0$ 使得 $\alpha - \varepsilon < f(x_3)$ 。从而对任意 $x \in (x_3, x_0)$, $\alpha - \varepsilon < f(x_3) \leq f(x) \leq \alpha$, 因此 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$ 。

同理可证, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \beta$ 。

如果 $\alpha = \beta$, 则 $f(x_0) = \alpha = \beta = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。从而 f 在 x_0 处连续。

如果 f 在 x_0 处间断, 则 $\alpha < \beta$, f 在 x_0 处为跳跃间断。

(2) 如果 $x_1, x_2 \in I$ 是 f 的间断点, 满足 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1^-) < f(x_1^+) \leq f(x_2^-) < f(x_2^+)$ 。且区间 $(f(x_1^-), f(x_1^+))$ 内最多只含一个函数值 $f(x_1)$ 。而区间 $(f(x_1^-), f(x_1^+))$ 与 $(f(x_2^-), f(x_2^+))$ 不相交。

对于 f 的每个间断点 x_0 , 取一个有理数 $r \in (f(x_0^-), f(x_0^+))$ 与 x_0 对应。而不同间断点对应于不同的有理数, 所以 f 的间断点集不会包含比有理数集更多的元素。而有理数集是可数无穷集—即全体有理数可以组成一个数列:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots \quad (*)$$

所以单调函数的间断点集最多是可数无穷集。

(3) (必要性) 设 f 连续。我们证明 $f(I)$ 是区间。任取 $y_1, y_2 \in f(I)$ 以及 $y \in (y_1, y_2)$, 我们证明 $y \in f(I)$.

设 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ 。则 $x_1 < x_2$ 。

记

$$A = \{x \in I \mid f(x) < y\}.$$

于是 $x_1 \in A, x_2$ 是 A 的上界。所以上确界 $x_0 = \sup A$ 存在, 且 $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ 。

若 $f(x_0) < y$, 则 $x_0 < x_2$, 由连续性知存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in (x_0, x_0 + \delta) \subset (x_0, x_2), f(x) < y$ 。这与 x_0 是 A 的上界矛盾。

如果 $f(x_0) > y$, 则 $x_0 > x_1$, 由连续性知存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \subset (x_1, x_0), f(x) > y$ 。这与 x_0 是 A 的上确界矛盾。

所以 $f(x_0) = y$ 。

(充分性) 设 $f(I)$ 是区间。我们证明 f 连续。由(1)的证明知 f 没有间断点。所以 f 连续。

(4) 由 f 严格单调知 f 有反函数 $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$, 它也是严格单调函数, 且 $I = f^{-1}(f(I))$ 是区间, 所以由(3)知 f^{-1} 连续。□

注. (反三角函数的存在性和连续性) 由于在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上 \sin 连续且严格增 (见第2次习题课解答), 所以在该区间中 \sin 的值域为 $[-1, 1]$, 并且它有连续的反函数 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 同理, 在区间 $[0, \pi]$ 上 \cos 有连续的反函数 $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

可以证明 $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上连续且严格增。又因为对任意正整数 n ,

$$\tan\left(\arcsin \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\right) = n,$$

且 \tan 是奇函数, 所以 $[-n, n]$ 中的实数都是 \tan 的函数值。从而 \tan 的值域为 \mathbb{R} 。于是 \tan 有连续的反函数 $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。

根据例1结论, 不存在这样的单调函数, 它在所有无理数处间断。但以下例题表明存在单调函数, 它恰在所有有理数处间断。

例 2. (★★★) 设 a_n 是 (*) 中的数列。

$$I_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } a_n \leq x; \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

对正整数 N , 记

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} I_n(x).$$

证明:

1. 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 极限 $f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(x)$ 存在。
2. f 在 \mathbb{R} 上严格增。
3. f 在每个有理数处间断, 在所有无理数处连续。

证明. (1) 对固定的 x , 数列 $\{f_N(x)\}$ 单调不减,

$$0 \leq f_N(x) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 1,$$

所以极限 $f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(x)$ 存在, 并且 $0 \leq f(x) \leq 1$ 。

(2) 对任意 $x < y$, 由于有理数稠密, 所以存在 N_1 使得 $x < a_{N_1} < y$, 因此对任意 $N \geq N_1$,

$$f_N(y) - f_N(x) \geq \frac{1}{2^{N_1}}.$$

让 $N \rightarrow +\infty$, 得到 $f(y) - f(x) \geq \frac{1}{2^{N_1}} > 0$ 。所以 f 严格增。

(3) 对于任意 N_0 , 以及任意 $x < a_{N_0}$, 对 $N \geq N_0$

$$f_N(a_{N_0}) - f_N(x) \geq \frac{1}{2^{N_0}}$$

让 $N \rightarrow +\infty$, 得到 $f(a_{N_0}) - f(x) \geq \frac{1}{2^{N_0}}$ 。所以

$$\lim_{x \rightarrow a_{N_0}^-} f(x) \leq f(a_{N_0}) - \frac{1}{2^{N_0}} < f(a_{N_0}) \leq \lim_{x \rightarrow a_{N_0}^+} f(x).$$

所以 f 在 a_{N_0} 间断。

对任何无理数 y , 以及任意正整数 M , 取

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{1 \leq n \leq M} |a_n - y|,$$

则 $\delta > 0$, 且: 若 $|a_n - y| < \delta$, 则 $n > M$ 。

于是对任意 $x \in (y - \delta, y + \delta)$

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{n > M} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^M}.$$

所以 f 在 y 处连续。 □

例 3. 设 $x > 0$, 记

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{2} + \frac{x}{2y_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明对任意 $y_0 > 0$, 数列 y_n 收敛到 \sqrt{x} 。

证法 1. 用数学归纳法可以证明 $y_n > 0, \forall n \geq 0$ 。从而

$$y_n = \frac{y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}}{2} \geq \sqrt{y_{n-1} \cdot \frac{x}{y_{n-1}}} = \sqrt{x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

从而

$$y_n - y_{n-1} = \frac{\frac{x}{y_{n-1}} - y_{n-1}}{2} \leq 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

因此数列 y_n 单调不增有下界, 从而收敛, 且极限 $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \geq \sqrt{x} > 0$ 。

$$y_n = \frac{y_{n-1}}{2} + \frac{x}{2y_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

两边让 $n \rightarrow +\infty$, 得到

$$A = \frac{A}{2} + \frac{x}{2A},$$

即 $A^2 = x$, 从而 $A = \sqrt{x}$ 。 □

证法 2.

$$y_n - \sqrt{x} = \frac{y_{n-1}}{2} + \frac{x}{2y_{n-1}} - \sqrt{x} = \frac{(y_{n-1} - \sqrt{x})^2}{2y_{n-1}} \quad n = 1, 2, \dots$$

由证法 1 知 $y_{n-1} \geq \sqrt{x}, \forall n \geq 2$, 所以

$$\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{2y_{n-1}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2y_{n-1}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

因此对 $n \geq 2$

$$|y_n - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2} |y_{n-1} - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |y_1 - \sqrt{x}| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \sqrt{x}$ 。 □

例 4. 设 $0 \leq x \leq 1$ 。记 $y_0 = 0$,

$$y_n = y_{n-1} + \lambda(x - y_{n-1}^2), \quad n \geq 1.$$

求正数 λ 的值, 使得数列 y_n 是单调不减数列; 此时, 证明数列 y_n 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ 的值。

解. (1) $y_{n+1} \geq y_n$ 当且仅当 $\lambda(x - y_n^2) \geq 0$, 即 $0 \leq y_n \leq \sqrt{x}$ 。

而 $0 \leq y_{n+1} \leq \sqrt{x}$ 当且仅当 $y_n + \lambda(x - y_n^2) \leq \sqrt{x}$, 即

$$(y_n - \sqrt{x})(\lambda y_n + \lambda\sqrt{x} - 1) \geq 0.$$

为保证由这个不等式能够推出 $y_n \leq \sqrt{x}$, 只需

$$\frac{1 - \lambda\sqrt{x}}{\lambda} \geq \sqrt{x},$$

即

$$\frac{1}{\lambda} \geq 2\sqrt{x}$$

因此常数 λ 满足

$$\frac{1}{\lambda} \geq 2$$

即 $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

(2) 由(1)和 $y_0 = 0$ 用数学归纳法可得 $0 \leq y_n \leq y_{n+1} \leq \sqrt{x} \leq 1$ 。

所以极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ 存在。

记 $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ 。

在 $y_{n+1} = y_n + \lambda(x - y_n^2)$ 两边对 $n \rightarrow +\infty$ 取极限, 得到

$$A = A + \lambda(x - A^2),$$

而 $A \geq 0$, 所以 $A = \sqrt{x}$ 。

事实上, 我们不难发现 y_n 是关于 x 的多项式, 这是用多项式来逼近函数 \sqrt{x} . 我们将来证明这是一致逼近。□

例 5. 设 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 严格增、连续。证明对任何 $x_0 \in [0, 1]$, 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0)$ 存在, 且极限值 x^* 满足 $f(x^*) = x^*$ 。

证明. 若 $f(x_0) = x_0$, 则 $f^n(x_0) = x_0$ 。

若 $f(x_0) > x_0$, 则用数学归纳法可以证明数列 $x_n = f^n(x_0)$ 严格增。而它有上界 1, 所以 $x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在。

$$|f(x^*) - f(x_n)| = |f(x^*) - x_{n+1}| \rightarrow |f(x^*) - x^*|$$

另一方面, 由连续性可得 $|f(x^*) - f(x_n)| \rightarrow 0$, 所以由极限的唯一性, $f(x^*) = x^*$ 。

类似可证, 若 $f(x_0) < x_0$, 则命题结论也成立。□

例 6. 在习题课 1 中我们证明了

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

所以数列 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 单调增, 有上界 $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4$; 数列 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调减, 有下界 $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$ 。所以极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

存在。易见它们相等, 记它们的共同的值为 e , 记 $\ln = \log_e$ 。于是

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

从而

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

利用以上事实, 证明数列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

收敛。

证明.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0.$$

所以 x_n 单调减。

又

$$x_n > \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0.$$

即 x_n 有下界。

所以 x_n 收敛。 □

例 7. 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ 。

证明. 由上题证明知

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

对 $0 < x < \frac{1}{2}$, 存在正整数 N 使得 $\frac{1}{N+1} < x \leq \frac{1}{N}$ 。因此

$$\frac{N}{N+2} = \frac{\frac{1}{N+2}}{\frac{1}{N}} < \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{N+1}\right)}{\frac{1}{N}} < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)}{\frac{1}{N+1}} < \frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{N+1}} = \frac{N+1}{N}.$$

于是

$$1 - 2x < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 + 2x,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ 。

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-y)}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{1-y}}{y} \quad (y = -x) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+z)}{1 - \frac{1}{1+z}} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+z)}{z} (1+z) = 1, \quad \left(z = \frac{1}{1-y} - 1\right). \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ 。 □

例 8. 设 $x_1 = a > 0, y_1 = b > 0$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}.$$

证明 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都收敛, 且极限相等。

证明. 用数学归纳法可知 $x_n > 0, y_n > 0$ 。

由平均值不等式知

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n + y_n}{2} \geq \sqrt{x_n y_n} = y_{n+1}. \\ x_{n+1} - x_n &= \frac{y_n - x_n}{2} \leq 0, \quad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \sqrt{\frac{x_n}{y_n}} \geq 1, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 最终成为单调减、单调增数列, 而 y_2 是前者的下界, x_2 是后者的上界。所以 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都收敛。

记 $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n, \beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ 。对

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

两边取极限, 得到 $\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$, 从而 $\alpha = \beta$ 。

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| = \frac{|x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2|}{x_{n+1} + y_{n+1}} = \frac{(x_n - y_n)^2}{4(x_{n+1} + y_{n+1})} \approx \frac{(x_n - y_n)^2}{8\alpha}.$$

上述数列会很快收敛。 □

例 9 (指数函数的一种定义, 只涉及乘方, ★). 对任何实数 x , 定义 $E_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. 证明:

1. 当 $n > -x$ 时, $E_n(x)$ 关于 n 严格增;
2. $E_n(x)$ 关于 n 有上界;
3. $E(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(x)$ 收敛于正数, $E(1) = e > 1$;
4. 对任意实数 x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^n = 1$;
5. 对任意实数 x, y , $E(x)E(y) = E(x+y)$;
6. $E(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而 $E(x)$ 到处连续;
7. $E(x)$ 关于 x 严格增;
8. E 的值域为 $(0, +\infty)$.

证明留作练习。

二、有界闭区间套

$$[a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots$$

等价的

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1,$$

于是存在极限 $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \geq 1} a_n, \beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \inf_{n \geq 1} b_n$ 。于是

$$[\alpha, \beta] = \bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n].$$

若进一步, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, 则 $\alpha = \beta$, 此时

$$\bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n] = \{\alpha\}.$$

例 10. (★) 设 $0 < \lambda < 1$ 。 $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = (1 - \lambda)x_n + \lambda x_{n+1}$ 。证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 并求它的值。

证明. 不妨设 $a \leq b$, 否则考虑 $y_n = -x_n$ 。用数学归纳法可以证明

$$x_{2n-1} \leq x_{2n+1} \leq x_{2n+2} \leq x_{2n}, \quad n \geq 1.$$

于是 $[x_{2n-1}, x_{2n}]$ 构成有界闭区间套, 从而 $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1}, \beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n}$ 存在。

$$x_{2n+2} = (1 - \lambda)x_{2n} + \lambda x_{2n+1}$$

两边取极限, 得到 $\beta = (1 - \lambda)\beta + \lambda\alpha$, 所以 $\alpha = \beta$, 因此 $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 。

令 $y_n = \mu(x_n - \alpha)$ 。则

$$\begin{cases} y_{n+2} = \mu((1 - \lambda)x_n + \lambda x_{n+1} - \alpha) = (1 - \lambda)y_n + \lambda y_{n+1}, & n \geq 1, \\ y_1 = \mu(a - \alpha), & y_2 = \mu(b - \alpha). \end{cases}$$

当 $\mu = 1$ 时, 数列 $\{y_n\}$ 为 $\{x_n - \alpha\}$ 。

$$x_3 - \alpha = (1 - \lambda)a + \lambda b - \alpha,$$

于是取 μ 使得

$$\begin{cases} y_1 = \mu(x_1 - \alpha) = \mu(a - \alpha) = b - \alpha = x_2 - \alpha, \\ y_2 = \mu(x_2 - \alpha) = \mu(b - \alpha) = (1 - \lambda)a + \lambda b - \alpha = x_3 - \alpha, \end{cases}$$

即

$$\mu = \frac{b - \alpha}{a - \alpha} = \frac{(1 - \lambda)a + \lambda b - \alpha}{b - \alpha}$$

解得

$$\alpha = \frac{(1 - \lambda)a + b}{2 - \lambda}.$$

□

证法 2.

$$(1 - \lambda)x_{n+1} + x_{n+2} = (1 - \lambda)x_n + x_{n+1} = (1 - \lambda)a + b, \quad \forall n \geq 1.$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -(1 - \lambda)(x_{n+1} - x_n) = (\lambda - 1)^n(x_2 - x_1) = (\lambda - 1)^n(b - a),$$

所以

$$x_{x+2} = \frac{(1 - \lambda)a + b + (\lambda - 1)^n(b - a)}{2 - \lambda} \rightarrow \frac{(1 - \lambda)a + b}{2 - \lambda}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

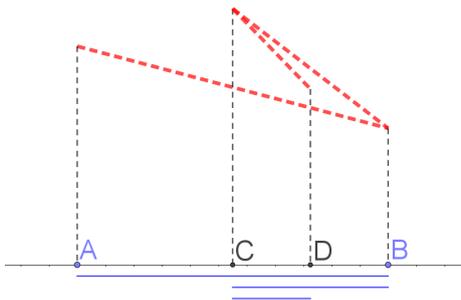
□

例 11 (导数与函数单调性, ★★). 设 f 在开区间 I 上可导, 即对任意 $x \in I$, 极限

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

存在. 证明: 若对任意 $x \in I$, 都有 $f'(x) > 0$, 则 f 在区间 I 上严格增.

证明. (反证法) 假设存在 $x_1, y_1 \in I$ 使得 $x_1 < y_1$ 且 $f(x_1) \geq f(y_1)$.



若 $\frac{f(\frac{x_1+y_1}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_1+y_1}{2} - x_1} \leq \frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1}$, 则取 $x_2 = x_1$, $y_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$.

若 $\frac{f(\frac{x_1+y_1}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_1+y_1}{2} - x_1} > \frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1}$, 则必然有 $\frac{f(y_1) - f(\frac{x_1+y_1}{2})}{y_1 - \frac{x_1+y_1}{2}} < \frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1}$,

此时取 $x_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, $y_2 = y_1$.

如此可得有界闭区间套 $[x_n, y_n]$, 满足

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{y_n - x_n}{2},$$

且

$$\frac{f(y_{n+1}) - f(x_{n+1})}{y_{n+1} - x_{n+1}} \leq \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

由有界闭区间套定理, 存在唯一实数 $x_0 \in I$ 满足对任意正整数 n , 都有 $x_0 \in [x_n, y_n]$.

于是必然存在 x_n, y_n 之一 (记为 a_n), 满足 $a_n \neq x_0$, 且

$$\frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} \leq \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \leq \frac{f(y_1) - f(x_1)}{y_1 - x_1}.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0$, 所以上述不等式两端取极限, 得到

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} \leq \frac{f(y_1) - f(x_1)}{y_1 - x_1} \leq 0.$$

这与 $f'(x) > 0 (\forall x \in I)$ 矛盾。

所以 f 在 I 上严格增。 \square

二、Cauchy 准则

【定义】 $\{a_n\}$ 是一个 **Cauchy 数列**: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N 使得对任意正整数 $m, n \geq N, |a_m - a_n| < \varepsilon$ 。

与极限概念相似: 是数列尾巴上的项的性质;

与极限概念不同: 这是用数列自身的项进行比较。

【性质】 任何收敛数列都是 Cauchy 数列。(直接从定义简单得到)

在实数集中, 任何 Cauchy 数列都是收敛的。(这是 Cauchy 准则的本质内容, 它并不平凡, 因为这在有理数范围内不成立。)

例 12 (压缩不动点定理, ★). 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是闭集 (即 I 中任何收敛数列, 其极限也在 I 中), $f: I \rightarrow I$ 是压缩映射, 即存在常数 $0 < \lambda < 1$ 使得对任意 $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|.$$

则存在唯一的 $x^* \in I$ 使得 $f(x^*) = x^*$, 且对任意 $x_0 \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x_0) = x^*$, 且

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\lambda^n |f(x_0) - x_0|}{1 - \lambda}, \quad \forall n \geq 1.$$

证明. 记 $x_n = f^n(x_0)$ 。则

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \lambda|x_n - x_{n-1}|,$$

从而

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{k=1}^p |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leq \sum_{k=1}^p \lambda^{n+k-1} |x_1 - x_0| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|.$$

所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列。于是 $x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 且 $x^* \in I$ 。上述不等式中, 令 $p \rightarrow +\infty$, 得到

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|.$$

$$\begin{aligned} |f(x^*) - x^*| &\leq |f(x^*) - f(x_n)| + |f(x_n) - x^*| \\ &\leq \lambda|x_n - x^*| + |x_{n+1} - x^*| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

所以 $f(x^*) = x^*$ 。

$$|x^\# - x^*| = |f(x^\#) - f(x^*)| \leq \lambda|x^\# - x^*|,$$

所以 $x^\# = x^*$ 。 \square

例 13. 例3, 用压缩不动点定理。

证明.

$$F(y) = \frac{y}{2} + \frac{x}{2y},$$

则

$$\begin{aligned} |F(y_2) - F(y_1)| &= \left| \frac{y_2 - y_1}{2} + \frac{x}{2y_2} - \frac{x}{2y_1} \right| \\ &= \left| \frac{y_2 - y_1}{2} \left(1 - \frac{x}{y_1 y_2} \right) \right|. \end{aligned}$$

对任意 $y > 0, F(y) \geq \sqrt{x}$ 。记 $I = [\sqrt{x}, +\infty)$ 。则 I 是闭区间, $F(I) \subset I$, 且对任意 $y_1, y_2 \in I$,

所以

$$0 < \frac{x}{y_1 y_2} \leq 1,$$

$$|F(y_2) - F(y_1)| \leq \frac{1}{2} |y_2 - y_1|,$$

是压缩映射。所以 F 有唯一不动点 $y^* = \sqrt{x}$, 且对任意 $y_0 > 0, y_n = F^n(y_0) \rightarrow \sqrt{x}, n \rightarrow +\infty$ 。□

例 14. (★) 例 4, $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq 1$, 用压缩不动点。

证明. 记 $I = \{y \mid 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$,

$$F(y) = y + \lambda(x - y^2).$$

则对任意 $y \in I, F(y) \geq 0$,

$$0 \leq y \leq \sqrt{x} \leq 1,$$

$$0 \leq \lambda(\sqrt{x} + y) \leq \frac{1}{2}(1 + 1) = 1,$$

$$\sqrt{x} - F(y) = \sqrt{x} - y - \lambda(x - y^2) = (\sqrt{x} - y)(1 - \lambda(\sqrt{x} + y)) \geq 0,$$

所以 $F(y) \in I$ 。

$$\begin{aligned} |F(y_2) - F(y_1)| &= |y_2 - y_1 + \lambda(y_1^2 - y_2^2)| = |y_2 - y_1| |1 - \lambda(y_1 + y_2)| \\ &\leq |y_2 - y_1| (1 - \sqrt{x}) \end{aligned}$$

所以, 当 $0 < x \leq 1$ 时, F 是映闭集 I 到 I 的压缩映射, 它有唯一不动点 $y = \sqrt{x}$ 。□

例 15. (★) 设 $0 < \lambda < 1, y_{n+1} = \frac{1-\lambda}{y_n} + \lambda$ 。证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ 存在, 并求它的值。

证明. 令

$$F(y) = \frac{1-\lambda}{y} + \lambda.$$

则对任意 $y > 0, F(y) \geq \lambda$.

$$F^2(y) = \frac{1-\lambda}{\frac{1-\lambda}{y} + \lambda} + \lambda.$$

则对任意 $y_1, y_2 \in [\lambda, +\infty)$,

$$\begin{aligned} |F^2(y_2) - F^2(y_1)| &= (1-\lambda)^2 \left| \frac{y_2 - y_1}{(1-\lambda + \lambda y_2)(1-\lambda + \lambda y_1)} \right| \\ &\leq \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda + \lambda^2} \right)^2 |y_2 - y_1| \end{aligned}$$

所以 F^2 映闭集 $[\lambda, +\infty)$ 到其自身的压缩映射, 所以 $y^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} F^{2n}(y_0)$ 存在, 且是 F^2 的唯一不动点.

不难发现 $F(1) = 1$ 。所以 $y^* = 1$ 。

因此

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^{2n+1}(y_0) = F \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} F^{2n}(y_0) \right) = F(1) = 1.$$

于是对任意 $y_0 > 0$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(y_0) = 1.$$

□

例 16. (★) 每一种收敛都对应一种 Cauchy 准则。试写出极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 收敛所对应的 Cauchy 准则, 并给以证明。

证明. Cauchy 准则: 极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 收敛当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x, y \in I$, 只要 $0 < |x - a| < \delta, 0 < |y - a| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

必要性是显然的, 只证明充分性。

任取数列 $x_n \in I$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ 且 $x_n \neq a$. 则对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x, y \in I$, 只要 $0 < |x - a| < \delta, 0 < |y - a| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 于是存在 N 使得对任意 $n, m \geq N$, $0 < |x_n - a| < \delta, 0 < |x_m - a| < \delta$. 因此 $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. 于是 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 数列, 因此收敛。记 $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$. 则

$$|f(x_n) - A| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

对任意 $x \in I$, 只要 $0 < |x - a| < \delta$, 就有

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f(x_N)| + |f(x_N) - A| < 2\varepsilon.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

□

例 17. (★) 设 $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. 证明: f 在 I 上连续且所有间断点都是可去间断点当且仅当对于 I 中的任意 Cauchy 数列 x_n , $f(x_n)$ 都是 Cauchy 数列。

证明. (必要性) 假设 x_n 是 I 中一个 Cauchy 数列, 但 $f(x_n)$ 不是 Cauchy 数列。则存在 $x_0 \in I$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ 。

若 $x_0 \in I$, 则 f 在 x_0 处连续, 所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

这与假设矛盾。

所以 $x_0 \notin I$. 此时 x_0 是 f 的可去间断点, 且 $x_n \neq x_0$ 。于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. 这也与假设矛盾。

于是假设是不成立的, 因而必要性得证。

(充分性) 假设 x_0 是 I 的一个聚点, 满足极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在。

由 Cauchy 准则知, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得对任意 $\delta > 0$ 都存在 $x, y \in I$ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta, 0 < |y - x_0| < \delta$, 但 $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. 于是对任意正整数 n 存在 $x_n, y_n \in I$ 满足 $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, 0 < |y_n - x_0| < \frac{1}{n}$, 但 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

令 $z_{2n-1} = x_n, z_{2n} = y_n$. 则 $\{z_n\}$ 是 Cauchy 列。但 $|f(z_{2n-1}) - f(z_{2n})| \geq \varepsilon$, 从而 $\{f(z_n)\}$ 不是 Cauchy 列。这与已知矛盾。

所以对 I 的任何聚点 x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在。

若 $x_0 \notin I$, 则 x_0 是 f 的可去间断点。

若 $x_0 \in I$ 满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 则取 $z_{2n-1} = x_0, z_{2n} \in I$ 满足 $|z_{2n} - x_0| < \frac{1}{n}$, 则 $\{z_n\}$ 是 Cauchy 列, 但 $\{f(z_n)\}$ 不是 Cauchy 列。矛盾。

所以 f 在 $x_0 \in I$ 处连续。 \square

例 18. 证明收敛

$$a_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

收敛, 并估计 $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 的值。

证明. 对任意正整数 n, m ,

$$a_{n+m} = a_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!},$$

所以

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+m} \\ &= a_n + \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} \right] \\ &\leq a_n + \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m} \right] \\ &\leq a_n + \frac{2}{(n+1)!} \end{aligned}$$

因此

$$|a_{n+m} - a_n| \leq \frac{2}{(n+1)!}.$$

所以 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 数列, 从而收敛。

让 $m \rightarrow +\infty$, 得到

$$a_n \leq A \leq a_n + \frac{2}{(n+1)!},$$

即

$$0 \leq A - a_n \leq \frac{2}{(n+1)!}$$

当 $n = 9$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{2}{(n+1)!} &= \frac{2}{10!} = \frac{2}{10 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 4 \times 8 \times 6 \times 9} \\ &< \frac{2}{10 \times 10 \times 20 \times 30 \times 50} = \frac{1}{1500000}, \end{aligned}$$

所以 $0 \leq A - a_9 < \frac{1}{1500000} < 6.67 \times 10^{-7}$. 因为 $a_9 = 2.7182815\dots$, 所以 A 的精确值位于 2.7182808 和 2.7182823 之间。□

例 19 (指数函数的另一种定义方式, 复数指数, ★★). 对复数 $z \in \mathbb{C}$, 定义

$$E_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!}.$$

证明:

1. $E_n(z)$ 关于 n 是 Cauchy 列, 从而存在极限 $E(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(z)$;

2. 对任意 $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} & |E_{2n+1}(z)E_{2n+1}(w) - E_{2n+1}(z+w)| \\ & \leq E_{n+1}(|z|) |E_{2n+1}(|w|) - E_{n+1}(|w|)| \\ & \quad + E_{n+1}(|w|) |E_{2n+1}(|z|) - E_{n+1}(|z|)|, \end{aligned}$$

从而 $E(z)E(w) = E(z+w)$.

3. 对 $|z| < 1$, $|E(z) - 1| \leq 2|z|$;

4. $E(z)$ 对 $z \in \mathbb{C}$ 连续;

5. $E(1) = e$.

证明留作练习。

例 20. (★) (1) 设数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 满足: 对任意正整数 n, p , 都有 $|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{p}{n^2}$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛?

(★★) (2) 设 $\beta > 0$, 数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 满足: 对任意正整数 n, p , 都有 $|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{p}{n^{1+\beta}}$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛?

(★★★) (3) 如果数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 满足: 对任意正整数 n, p , 都有 $|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{p}{n}$. 问 $\{x_n\}$ 是否收敛?

请证明你的结论。

解. (1) 收敛。

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| & \leq |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| \\ & \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)^2} \\ & \leq \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1} \right) \\ & \leq \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

所以, $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而收敛。

(2) 收敛。

方法与(1)相同。只需证明存在正数 γ 使得

$$\frac{1}{n^{1+\beta}} < \frac{1}{(n-1)^\gamma} - \frac{1}{n^\gamma}.$$

为此, 计算

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{1+\beta}} \frac{1}{\frac{1}{(n-1)^\gamma} - \frac{1}{n^\gamma}} \right) & = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\gamma (n-1)^\gamma}{n^{1+\beta} (n^\gamma - (n-1)^\gamma)} \\ & = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\gamma \frac{1}{n}}{n^{\beta-\gamma} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\gamma\right]} = \frac{1}{\beta}, \quad \text{若 } \gamma = \beta. \end{aligned}$$

所以存在 N 使得对任意 $n \geq N$,

$$\frac{1}{n^{1+\beta}} < \frac{2}{\beta} \left(\frac{1}{(n-1)^\beta} - \frac{1}{n^\beta} \right).$$

从而对任意 $n \geq N$ 及任意正整数 p ,

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{2}{\beta} \frac{1}{(n-1)^\beta}.$$

所以, $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 从而收敛。

(3) $\{x_n\}$ 可能发散。

$$\frac{\left| \frac{1}{2} \ln(n+p) - \frac{1}{2} \ln n \right|}{\frac{p}{n}} = \frac{1}{2} \frac{\left| \ln \frac{n+p}{n} \right|}{\frac{p}{n}} = \frac{1}{2} \frac{\left| \ln \left(1 + \frac{p}{n} \right) \right|}{\frac{p}{n}} \rightarrow \frac{1}{2},$$

所以存在 N 使得当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{1}{2} \ln(n+p) - \frac{1}{2} \ln n \right| < \frac{p}{n},$$

令 $x_n = \frac{1}{2} \ln(N+n)$. 则

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{p}{N+n} < \frac{p}{n}, \quad \forall n \geq 1, \forall p \geq 1.$$

□