

习题讨论课01题目：不等式、确界、幂指对函数

★号（越）多表示题目（越）难

一、不等式

微积分的核心思想是通过近似和逼近来解决问题，所以不等式是重要的工具。不等式的来源：

- **不等式的基本性质：**传递 ($x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$), 运算性质 ($x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z; x \leq y, z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$)。以及基本性质的推论，比如 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ 。
- **函数的单调性：** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ 。比如对正整数 n, x^n 在区间 $(0, +\infty)$ 是严格增函数 x^{-n} 在区间 $(0, +\infty)$ 是严格减函数。
- 函数的最大值与最小值。
- 一些常见不等式。

例 1. (Cauchy-Schwarz不等式). 证明对任意实数 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$,

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

等式成立当且仅当存在实数 λ 使得

$$a_k = \lambda b_k, \quad \forall 1 \leq k \leq n, \quad \text{或者} \quad b_k = \lambda a_k, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

事实上，成立等式

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + \dots + b_n^2) - (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

其几何意义是 \mathbb{R}^n 中由向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 所形成的平行四边形的面积与它在各 2 维坐标平面中的投影平行四边形面积之间的关系。

注：Cauchy-Schwarz 不等式是一类普遍成立的不等式，它反映了空间的内积构造，具有特殊的几何意义。

例 2. (Bernoulli 不等式). 设 $x_1, \dots, x_n > -1$, 且 $x_i x_j \geq 0 (\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\})$ 。证明

$$(1 + x_1) \cdots (1 + x_n) \geq 1 + (x_1 + \dots + x_n),$$

其中等号成立当且仅当 $n = 1$ 或者 x_1, \dots, x_n 中至多有一个非零。

经典的 Bernoulli 不等式：

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x > -1.$$

注：Bernoulli 不等式是本次习题课中最重要的不等式，可以把乘方运算降级为乘法运算。

例 3. 利用 Bernoulli 不等式证明对任何正整数 n 以及任何正数 a, b , 都有

$$ab^n \leq \left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1},$$

且等号成立当且仅当 $a = b$ 。并利用这个不等式证明对任何正整数 n , 都有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

例 4. (算术几何平均值不等式) 利用例 3 中不等式证明：对任意正整数 n 和非负数 x_1, x_2, \dots, x_n , 都成立

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

其中等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 。

例 5. (广义的算术几何平均值不等式) 证明对任何非负数 x_1, x_2, \dots, x_n 和任何正整数 p_1, p_2, \dots, p_n 都成立

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \leq \left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

其中等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 。

二、确界

上确界： $\mu = \sup A$

- μ 是 A 的上界： $x \in A \Rightarrow x \leq \mu$;
- μ 是 A 的最小上界：

$$\mu_1 \text{ 是 } A \text{ 的上界} \Rightarrow \mu_1 \geq \mu,$$

或等价的,

$$\forall \mu_1 < \mu, \mu_1 \text{ 不是 } A \text{ 的上界, 即存在 } x \in A \text{ 使得 } x > \mu_1.$$

类似地, 定义下确界。

确界公理：任何非空有上（下）界的实数子集必有上（下）确界。

例 6. (阿基米德性质). 证明对任意正数 ε , 存在正整数 n 使得 $\frac{1}{n} < \varepsilon < n$ 。

例 7. 设 $a > 1, \varepsilon > 0$. 证明存在正整数 m 使得 $a^{-m} < \varepsilon < a^m$ 。

例 8. 证明: 实数 α 是实数子集 A 的上确界当且仅当

- 任何比 α 小的有理数都不是 A 的上界;
- 任何比 α 大的有理数都是 A 的上界。

例 9. (★) 设 A, B 是非空有上界的实数子集, 且存在 $a_0, b_0 > 0$ 满足 $a_0 \in A, b_0 \in B$. 记

$$AB = \{c \in \mathbb{R} \mid \text{存在 } a, b > 0 \text{ 使得 } a \in A, b \in B, c \leq ab\}.$$

证明 AB 非空有上界, 且 $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$ 。

注: 这本质上是用 Dedekind 分割作为实数时, 定义两个正实数乘积的办法。

三、关于乘方、开方、幂指对函数

虽然在中学学习了开方和幂指对函数, 但它们不是用算术运算 (有限次加减乘除) 得到的, 它们的很多性质需要用到实数的本质性质 (确界公理)。

例 10. (★) (从乘方到开方) 设 n 是正整数。证明函数 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^n$ 是严格增满射。

定义: 对正数 y 和正整数 n , 定义 $y^{\frac{1}{n}}$ 是 $x^n = y$ 的唯一正数解 x . 对整数 m , 定义 $y^{\frac{m}{n}} = \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

例 11. (★★) (从乘方到对数函数) 设 $a > 1, x > 0$, 记

$$A_x = \left\{ \frac{m}{n} \mid n \text{ 是正整数, } m \text{ 是整数, } a^m \leq x^n \right\}.$$

1. 证明 A_x 非空有上界。记 $\log_a x = \sup A_x$.
2. 证明对任意正数 x, y , $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. 并且 $\log_a a = 1$.
3. 对任何有理数 $\frac{m}{n}$, $\log_a(a^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}$.
4. 证明 $\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是严格增满射。

定义: 指数函数 a^x 是对数函数 \log_a 的反函数。

所以 a^x 是 \mathbb{R} 到 \mathbb{R}^+ 的严格增满射。

由于

$$\log_a(a^x a^y) = \log_a(a^x) + \log_a(a^y) = x + y,$$

所以

$$a^x a^y = a^{x+y}.$$

思考题: (★★) 如何证明对任意正数 a, b 和任意实数 x, y , 都有 $(a^x)^y = a^{xy}$ 以及 $a^x b^x = (ab)^x$?

定义: 幂函数 $x^\mu = 2^{\mu \log_2 x}$.