习题讨论课01答案：不等式、确界、幂指对函数

★号（越）多表示题目（越）难

一、不等式

微积分的核心思想是通过近似和逼近来解决问题，所以不等式是重要的工具。不等式的来源：

- **不等式的基本性质**：传递 $(x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z)$, 运算性质 $(x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z; x \leq y, z>0 \Rightarrow xz \leq yz)$ 。以及基本性质的推论，比如 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ 。
- **函数的单调性**：$x_1<x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) \leq f\left(x_2\right)$ 。比如对正整数 n, x^n 在区间 $(0,+\infty)$ 是严格增函数 x^{-n} 在区间 $(0,+\infty)$ 是严格减函数。
- 函数的最大值与最小值。
- 一些常见不等式。

例 1. (Cauchy-Schwarz不等式). 证明对任意实数 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$,

$$\left(a_1 b_1+\cdots+a_n b_n\right)^2 \leq\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right).$$

等式成立当且仅当存在实数 λ 使得

$$a_k=\lambda b_k, \quad \forall 1 \leq k \leq n, \quad \text{或者} \quad b_k=\lambda a_k, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

事实上，成立等式

$$\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right)-\left(a_1 b_1+\cdots+a_n b_n\right)^2=\sum_{1 \leq i<j \leq n}\left(a_i b_j-a_j b_i\right)^2.$$

其几何意义是 $\mathbb{R}^n$ 中由向量 $\mathbf{a}=\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)^T$ 和 $\mathbf{b}=\left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)^T$ 所形成的平行四边形的面积与它在各 2 维坐标平面中的投影平行四边形面积之间的关系。

证法1. 构造函数

$$L(t)=\left(a_1-t b_1\right)^2+\cdots+\left(a_n-t b_n\right)^2.$$

则

$$L(t)=\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)-2 t\left(a_1 b_1+\cdots+a_n b_n\right)+t^2\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right).$$

若 $b_1^2+\cdots+b_n^2=0$, 则由 $L(t) \geq 0(\forall t)$ 知 $a_1 b_1+\cdots+a_n b_n=0$ 。此时 CauchySchwarz 不等式为等式。而且 $b_1=\cdots=b_n=0$, 所以 $b_k=0 a_k(\forall k)$ 。

若 $b_1^2+\cdots+b_n^2\neq 0$, 则

$$L(t)=\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right)\left(t-\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{b_1^2+\cdots+b_n^2}\right)^2 + \left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)-\frac{\left(a_1b_1+\cdots+a_nb_n\right)^2}{b_1^2+\cdots+b_n^2}.$$

于是

$$L\left(\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{b_1^2+\cdots+b_n^2}\right)=\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)-\frac{\left(a_1b_1+\cdots+a_nb_n\right)^2}{b_1^2+\cdots+b_n^2}\geq 0.$$

因此 Cauchy-Schwarz 不等式成立。等号成立当且仅当

$$a_k=\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{b_1^2+\cdots+b_n^2}b_k,\quad \forall k.$$

$\square$

证法2.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)-\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2 &= \sum_{i,j=1}^n\left(a_i^2b_j^2-a_ib_ia_jb_j\right)\\ &=\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2-2a_ib_ia_jb_j\right)\\ &=\sum_{1\leq i<j\leq n}\left|\begin{matrix}a_i & b_i\\ a_j & b_j\end{matrix}\right|^2\geq 0.\end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$a_i:b_i=a_j:b_j,\quad \forall 1\leq i<j\leq n.$$

$\square$

注：Cauchy-Schwarz 不等式是一类普遍成立的不等式，它反映了空间的内 积构造，具有特殊的几何意义。

例 2. (Bernoulli 不等式). 设 $x_1,\ldots,x_n>-1$, 且 $x_ix_j\geq 0(\forall i,j\in\{1,2,\ldots,n\})$。证明

$$(1+x_1)\cdots(1+x_n)\geq 1+(x_1+\cdots+x_n),$$

其中等号成立当且仅当 $n=1$ 或者 $x_1,\ldots,x_n$ 中至多有一个非零。

经典的 Bernoulli 不等式：

$$(1+x)^n\geq 1+nx,\quad \forall n\in\mathbb{N},\forall x>-1.$$

证明. 用数学归纳法。

$n=1$ 时等式成立。

假设 n 时结论成立。则

$$\begin{aligned}(1+x_1)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1}) &\geq [1+(x_1+\cdots+x_n)](1+x_{n+1}) \\ &= 1+(x_1+\cdots+x_{n+1})+(x_1+\cdots+x_n)x_{n+1} \\ &\geq 1+(x_1+\cdots+x_{n+1})\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $x_1,\ldots,x_n$ 中至多有一个非零 且 $(x_1+\cdots+x_n)x_{n+1}=0$ 。若 $x_1,\ldots,x_n$ 不全为零 因 $x_ix_j\geq 0$, 所以 $x_1+\cdots+x_n\neq 0$, 从而 $x_{n+1}=0$ 。因此等号成立当且仅当 $x_1,\ldots,x_{n+1}$ 中至多有一个非零。 □

注：Bernoulli 不等式是本次习题课中最重要的不等式，可以把乘方运算降级为乘法运算。

例 3. 利用 Bernoulli 不等式证明对任何正整数 n 以及任何正数 a,b, 都有

$$ab^n \leq \left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1},$$

且等号成立当且仅当 $a=b$ 。并利用这个不等式证明对任何正整数 n, 都有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

证明.

$$\left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} = b^{n+1}\left(1+\frac{\frac{a}{b}-1}{n+1}\right)^{n+1} \geq b^{n+1}\left(1+\frac{a}{b}-1\right) = ab^n.$$

取 $a=1, b=1+\frac{1}{n}$, 则

$$\left(\frac{1+(n+1)}{n+1}\right)^{n+1} > ab^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

取 $a=1, b=1-\frac{1}{n+1}$, 则

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{a+(n+1)b}{n+2}\right)^{n+2} > ab^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

□

例 4. (算术几何平均值不等式) 利用例 3 中不等式证明：对任意正整数 n 和非负 数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$, 都成立

$$x_1x_2\cdots x_n \leq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

其中等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 。

证明. 用数学归纳法。当 $n=1$ 时结论成立。

假设 n 时结论成立。记 $A_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, 则

$$A_{n+1}^{n+1}=\left(\frac{x_{n+1}+nA_n}{n+1}\right)^{n+1}\geq x_{n+1}A_n^n\geq x_1\cdots x_nx_{n+1}.$$

等号成立当且仅当 $x_{n+1}=A_n, x_1=\cdots=x_n$, 即 $x_1=\cdots=x_n=x_{n+1}$ 。 □

注：平均值不等式有多种证明方法，上述证明可能是最简单的一种。而且它避免了开方运算。

例 5. (广义的算术几何平均值不等式) 证明对任何非负数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 和任何正整数 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 都成立

$$x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdot\cdots\cdot x_n^{p_n}\leq\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

其中等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 。

证明. 记

$$\begin{gathered}y_1=\cdots=y_{p_1}=x_1,\\ y_{p_1+1}=\cdots=y_{p_1+p_2}=x_2,\\ \vdots\\ y_{p_1+\cdots+p_{n-1}+1}=\cdots=y_{p_1+\cdots+p_n}=x_n.\end{gathered}$$

然后使用最简单的算术几何平均不等式。 □

二、确界

上确界：$\mu=\sup A$

- μ 是 A 的上界：$x\in A\Rightarrow x\leq\mu$;
- μ 是 A 的最小上界：

$$\mu_1 \text{ 是 } A \text{ 的上界 } \Rightarrow\mu_1\geq\mu,$$

或等价的，

$$\forall\mu_1<\mu,\mu_1 \text{ 不是 } A \text{ 的上界, 即存在 } x\in A \text{ 使得 } x>\mu_1.$$

类似地，定义下确界。

确界公理：任何非空有上（下）界的实数子集必有上（下）确界。

例 6. (阿基米德性质). 证明对任意正数 ε, 存在正整数 n 使得 $\frac{1}{n}<\varepsilon<n$ 。

证明. 记
$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \le 1 + \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$
则 $1 \in A$，且 $1+\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}$ 是 A 的上界。所以由**实数的确界性质**知 A 有上确界 n_0。

$n_0 - 1$ 不是 A 的上界，所以存在 $m \in A$ 使得 $m > n_0 - 1$ 。于是 $m+1 \notin A$，从而 $m+1 > 1+\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}$，即 $m > \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}$。从而 $\frac{1}{m} < \frac{1}{\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}} < \varepsilon$。 □

注：由上述证明知：对任意正数 $a > 1$, 存在正整数 m 使得 $m \le a$, 但 $m+1 > a$。易见这样的正整数 m 是唯一的，记 $m = \lfloor a \rfloor$, 称为 a 的整数部分。

例 7. 设 $a > 1, \varepsilon > 0$。证明存在正整数 m 使得 $a^{-m} < \varepsilon < a^m$。

证明. **（尽量避免取对数）** 存在正整数 m 使得 $m > \frac{\varepsilon}{a-1} + \frac{1}{(a-1)\varepsilon}$ 。所以由 Bernoulli 不等式，
$$a^m = (1+(a-1))^m \ge 1 + m(a-1) > m(a-1) > \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon},$$
所以
$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} < \frac{1}{\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon < a^m.$$
□

例 8. 证明：实数 α 是实数子集 A 的上确界当且仅当

- 任何比 α 小的有理数都不是 A 的上界；
- 任何比 α 大的有理数都是 A 的上界。

证明. （必要性）设 $\alpha = \sup A$ 。任给有理数 x, y 满足 $x < \alpha < y$ 。因为 α 是 A 的最小上界 所以 x 不是 A 的上界。

对任意 $a \in A$, 都有 $a \le \alpha < y$, 所以 y 是 A 的上界。

(充分性) 设 α 满足：任何比 α 小的有理数都不是 A 的上界；且任何比 α 大 的有理数都是 A 的上界。

假设 α 不是 A 的上确界。则要么 (1) α 不是 A 的上界，要么 (2) α 是 A 的上界，但不是 A 的最小上界。

对情形 (1), 存在 $a \in A$ 使得 $a > \alpha$ 。由于**有理数在实数集中稠密**，从而存在有理数 r 满足 $\alpha < r < a$，因此 r 是 A 的上界。但 $a > r$ 且 $a \in A$。矛盾。

对情形 (2), 存在 A 的上界 b 满足 $b < \alpha$。由于**有理数在实数集中稠密**，存在有理数 $r \in (b, \alpha)$。由 $r > b$ 知 r 是 A 的上界，但这与“任何比 α 小的有理数都不是 A 的上界”矛盾。

因此 α 是 A 的上确界。 □

例 9. （★）设 A, B 是非空有上界的实数子集，且存在 $a_0, b_0 > 0$ 满足 $a_0 \in A, b_0 \in B$。记

$$AB = \{c \in \mathbb{R} \mid \text{ 存在 } a, b > 0 \text{ 使得 } a \in A, b \in B, c \le ab\}.$$

证明 AB 非空有上界，且 $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$ 。

证明. 记 $\alpha = \sup A, \beta = \sup B$ 。

易见 $a_0 b_0 \in AB$，所以 AB 非空。

对任意 $c \in AB$, 取 $a \in A, b \in B$ 使得 $a, b > 0$ 且 $c \le ab$ 。从而 $c \le ab \le \alpha\beta$。因此 $\alpha\beta$ 是 AB 的上界。

下证 $\alpha\beta$ 是 AB 的上确界。这只需证明对任意 $\varepsilon > 0$，$\alpha\beta - \varepsilon$ 不是 AB 的上界。

由于 $\alpha\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\alpha\beta+\varepsilon}\right)$ 不是 A 的上界，从而存在 $a_1 \in A$ 使得

$$0 < \alpha\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\alpha\beta+\varepsilon}\right) < a_1 \le \alpha.$$

同理存在 $b_1 \in B$ 使得

$$0 < \beta\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\alpha\beta+\varepsilon}\right) < b_1 \le \beta.$$

于是

因此 $a_1 b_1 \in AB$，且

$$\alpha\beta\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\alpha\beta+\varepsilon}\right)^2 < a_1 b_1 \le \alpha\beta.$$

于是

$$\sup(AB) \ge \alpha\beta\left(1 - \frac{\varepsilon}{2\alpha\beta+\varepsilon}\right)^2 \ge \alpha\beta\left(1 - \frac{2\varepsilon}{2\alpha\beta+\varepsilon}\right) > \alpha\beta - \varepsilon.$$

所以 $\sup(AB) = \alpha\beta$ 。 □

注：这本质上是用 Dedekind 分割作为实数时，定义两个正实数乘积的办法。

三、关于乘方、开方、幂指对函数

虽然我们在中学学习了开方和幂指对函数，但它们不是用算术运算（有限次加减乘除）得到的，它们的很多性质需要用到实数的本质性质（确界公理）。

例 10. （★）**(从乘方到开方)** 设 n 是正整数。证明函数 $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，$x \mapsto x^n$ 是严格增满射。

证明. 单调性可以对 n 作数学归纳证明。下证 f 是满射，即对任意 $y > 0$，存在 $x > 0$ 使得 $x^n = y$。

记 $A = \{z \in \mathbb{R}^+ | z^n < y\}$。

由阿基米德性质，存在正整数 $N > y + \frac{1}{y}$，于是

$$N^n \geq N > y > \frac{1}{N} \geq \left(\frac{1}{N}\right)^n,$$

所以 $\frac{1}{N} \in A$。由 x^n 的单调性以及 $N^n > y$ 知，N 是 A 的上界。

从而 A 非空且有上界，因此有上确界，记 $x = \sup A$。则 $x \geq \frac{1}{N} > 0$。下证 $x^n = y$。

若 $x^n > y$，则当正整数 $m > \frac{n}{1-\frac{y}{x^n}}$ 时，由 Bernoulli 不等式知，

$$\left[x\left(1-\frac{1}{m}\right)\right]^n > x^n\left(1-\frac{n}{m}\right) > y,$$

从而 $x\left(1-\frac{1}{m}\right)$ 是 A 的上界，这与 x 是最小上界矛盾。

若 $x^n < y$，则当正整数 $m > \frac{n}{1-\frac{x^n}{y}}$ 时，由 Bernoulli 不等式知，

$$\left[x\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]^n = \frac{x^n}{\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^n} < \frac{x^n}{1-\frac{n}{m+1}} < \frac{x^n}{1-\frac{n}{m}} < y,$$

从而 $x\left(1+\frac{1}{m}\right) \in A$，这与 x 是 A 的上界矛盾。

所以 $x^n = y$.

因此 f 是满射。 □

定义： 对正数 y 和正整数 n，定义 $y^{\frac{1}{n}}$ 是 $x^n = y$ 的唯一正数解 x. 对整数 m，定义 $y^{\frac{m}{n}} = \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

例 11. （★★）**(从乘方到对数函数)** 设 $a > 1$，$x > 0$，记

$$A_x = \left\{\frac{m}{n} \middle| n \text{ 是正整数，} m \text{ 是整数，} a^m \leq x^n \right\}.$$

1. 证明 A_x 非空有上界。记 $\log_a x = \sup A_x$.
2. 证明对任意正数 x, y，$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. 并且 $\log_a a = 1$.
3. 对任何有理数 $\frac{m}{n}$，$\log_a(a^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}$.
4. 证明 $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 是严格增满射。

证明.

引理 12. *若 $x^q \leq a^p$，则 $\frac{p}{q}$ 是 A_x 的上界*

引理的证明. 对任意 $\frac{m}{n} \in A_x$，

$$a^{mq} = (a^m)^q \leq (x^n)^q = (x^q)^n \leq (a^p)^n = a^{pn}$$

所以 $mq \leq pn$，从而 $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$. □

(1) 存在正整数 M 使得，$a^{-M} \le x \le a^M$。

所以 $-M \in A_x$，A_x 非空。并且由引理知，M 是 A_x 的上界。

于是 A_x 有上确界。

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$，取正整数 N 使得 $\frac{2}{N} < \varepsilon$。

存在整数 m_1 和 m_2 使得

$$a^{m_1} \le x^N < a^{m_1+1}, \quad a^{m_2} \le y^N < a^{m_2+1},$$

所以 $\frac{m_1}{N} \in A_x, \frac{m_2}{N} \in A_y$，并且 $\frac{m_1+1}{N}$ 是 A_x 的上界，$\frac{m_2+1}{N}$ 是 A_y 的上界，从而

$$\frac{m_1+1}{N} \ge \log_a x, \quad \frac{m_2+1}{N} \ge \log_a y.$$

另一方面，

$$a^{m_1+m_2} \le (xy)^N < a^{m_1+m_2+2},$$

从而 $\frac{m_1+m_2}{N} \in A_{xy}$ 并且 $\frac{m_1+m_2+2}{N}$ 是 A_{xy} 的上界。因此

$$\begin{aligned}\log_a x + \log_a y - \frac{2}{N} &\le \frac{m_1+1}{N} + \frac{m_2+1}{N} - \frac{2}{N} \\ &= \frac{m_1+m_2}{N} \le \log_a(xy) \le \frac{m_1+m_2+2}{N} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \le \log_a x + \log_a y + \frac{2}{N}.\end{aligned}$$

于是

$$|\log_a x + \log_a y - \log_a(xy)| \le \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

从而

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy).$$

$\log_a a = 1$ 从定义可以马上得到。

(3) 由(2)和数学归纳法可知：对一切正数 b，对一切正整数 n，$\log_a(b^n) = n\log_a b$. 从而 $\log_a(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}$.

由 $\log_a 1 = \log_a 1 + \log_a 1$ 知 $\log_a 1 = 0$.

对任意负整数 $-m$，$\log_a(b^{-m}) = \log_a 1 - \log_a(b^m) = -m\log_a b$.

从而对任意整数 m 和正整数 n，$\log_a(a^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}$.

(4) 先证 f 严格增。设 $0 < x < y$。当正整数 $n > \frac{a^2 x}{y-x}$ 时，

$$\frac{y^n}{x^n} = \left(1 + \frac{y-x}{x}\right)^n \ge 1 + \frac{n(y-x)}{x} > a^2.$$

取整数 m_1 使得

$$a^{m_1} \le x^n < a^{m_1+1}.$$

则

$$a^{m_1} \le x^n < a^{m_1+1} < a^{m_1+2} < a^2 x^n < y^n,$$

所以 $\frac{m_1+1}{n}$ 是 A_x 的上界，$\frac{m_1+2}{n} \in A_y$。所以

$$\log_a x \leq \frac{a_1+1}{n} < \frac{m_1+2}{n} \leq \log_a y.$$

下面证明 $\log_a$ 是满射，即对任意 $y \in \mathbb{R}$，存在 $x > 0$ 使得 $\log_a x = y$.

记

$$B_y = \left\{ a^{\frac{m}{n}} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, \frac{m}{n} \leq y \right\}.$$

对任意正整数 N，存在整数 M 使得

$$\frac{M}{N} \leq y < \frac{M+1}{N}$$

于是 $a^{\frac{M}{N}} \in B_y$.

对任意 $a^{\frac{m}{n}} \in B_y$，$\frac{m}{n} \leq y < \frac{M+1}{N}$，则 $a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{M+1}{N}}$，从而 $a^{\frac{M+1}{N}}$ 是 B_y 的上界。

所以 B_y 有上确界。记 $x = \sup B_y$。所以

$$a^{\frac{M}{N}} \leq x \leq a^{\frac{M+1}{N}}$$

则

$$\frac{M}{N} = \log_a(a^{\frac{M}{N}}) \leq \log_a x \leq \log_a \left(a^{\frac{M+1}{N}}\right) = \frac{M+1}{N}.$$

所以

$$|\log_a x - y| \leq \frac{M+1}{N} - \frac{M}{N} = \frac{1}{N}.$$

因此 $y = \log_a x$. 因此 $\log_a$ 是满射。 □

定义：指数函数 a^x 是对数函数 $\log_a$ 的反函数。

所以 a^x 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^+$ 的严格增满射。

由于

$$\log_a(a^x a^y) = \log_a(a^x) + \log_a(a^y) = x + y,$$

所以

$$a^x a^y = a^{x+y}.$$

思考题：（★★）如何证明对任意正数 a, b 和任意实数 x, y，都有 $(a^x)^y = a^{xy}$ 以及 $a^x b^x = (ab)^x$？

定义：幂函数 $x^\mu = 2^{\mu \log_2 x}$.