2023年清华大学微积分A（2）期末考试试题

（重整理）

一、填空题（每题3分）

1. 设D为由曲线$y^2=2x$和直线$x+y=4$，$x+y=12$围成的平面有界区域，则$\iint\limits_D 3dxdy=$________。
2. 设Ω是由$x=0$，$x=1$，$x=\dfrac{y^2}{3^2}+\pi^2z^2$围成的三维有界区域，则$I=\iiint\limits_\Omega (x+y)dxdydz=$________。
3. 累次积分$\int_0^{ln3}dx\int_x^{ln3}\dfrac{e^y}{y}dy=$________。
4. 设$u(x,y)$为$e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy=0$的原函数，且满足$u(1,1)=e^2+e+5$，则$u(0,0)=$________。
5. L^+是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$上的一条C^1曲线。以$S(0,0,-1)$为起点，以$N(0,0,1)$为终点。则$\int\limits_{L^+}[2y+sin(y^2+z^2)]dx+2[x+ln(1+z^2+x^2)]dy-3(x^2+y^2-1)dz=$________。
6. 设曲线$\gamma: x=2t, y=t, z=2-2t, (0\le t\le 1)$。则$\int\limits_\gamma (2x+4y+z^2-4)dl=$________。
7. 设曲面Σ是$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧，则$\iint\limits_\Sigma (y-z)dy\wedge dz+(z-x)dz\wedge dx+(x-y)dx\wedge dy=$________。
8. 设$\lambda>0$，记L_λ^+为圆周$x^2+y^2=\lambda^2$，逆时针为正向，则$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{1}{\pi\lambda^2}[\oint\limits_{L_\lambda^+}(sinx+y+e^y)dx+(3x+xe^y)dy]=$________。

二、单选题（每题3分）

1. 设函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上连续，交换累次积分的顺序$\int_{-2}^1dx\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)dy=$____。
   A. $\int_1^4dy\int_{2-y}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$
   B. $\int_0^1dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx+\int_1^4dy\int_{2-y}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$
   C. $\int_0^1dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_1^4dy\int_{-\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx$
   D. $\int_1^4dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx$
2. 向量场$\mathbf{V}=(x+y+z)\mathbf{i}+(x^2+y^2+z^2)\mathbf{j}+(x^3+y^3+z^3)\mathbf{k}$在$(0,0,0)$处的旋度为____。
   A. $\mathbf{j}+\mathbf{k}$
   B. $\mathbf{i}+\mathbf{k}$
   C. $\mathbf{j}-\mathbf{k}$
   D. $\mathbf{i}-\mathbf{k}$
3. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}}-1)$收敛当且仅当参数$p$满足____。
   A. $p>\frac{1}{2}$
   B. $p\ge 2$
   C. $p\ge 1$
   D. $p>1$
4. 已知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处条件收敛，则级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$____。
   A. 不能确定
   B. 绝对收敛
   C. 条件收敛

D. 发散

5. 比较三个积分$J_i = \iint\limits_{D_i}(x-y)^{1/3}dxdy\ (i=1,2,3)$的大小，其中

$D_1 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

$D_2 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$

$D_3 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$

则____。

A. $J_2 < J_1 < J_3$

B. $J_1 < J_2 < J_3$

C. $J_3 < J_1 < J_2$

D. $J_2 < J_3 < J_1$

6. 以下四个选项中，正确的选项是____。

A. 存在可微向量场$\mathbf{V}(x,y,z)$使得$rot\mathbf{V}(x,y,z) = (x, z^2, siny)$

B. 存在可微函数f使得$gradf(x,y,z) = (y, -x-2z, 2y)$

C. 对$\mathbb{R}^3$中的每个线性向量场$\mathbf{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，都存在可微函数$f$以及可微向量场$\mathbf{W}$使得$\mathbf{V} = gradf + rot\mathbf{W}$

D. 这四个选项中，其他三个选项都不对

7. 关于幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，以下陈述中正确的是____。

A. 对任意$0<\delta<1$，该幂级数在任何区间$[-1, 1-\delta]$上一致收敛

B. 对任意$0<\delta<1$，该幂级数在任何区间$[-1+\delta, 1-\delta]$上一致收敛，但在区间$[1-\delta, 1)$和$(-1, -1+\delta)$上都不是一致收敛的

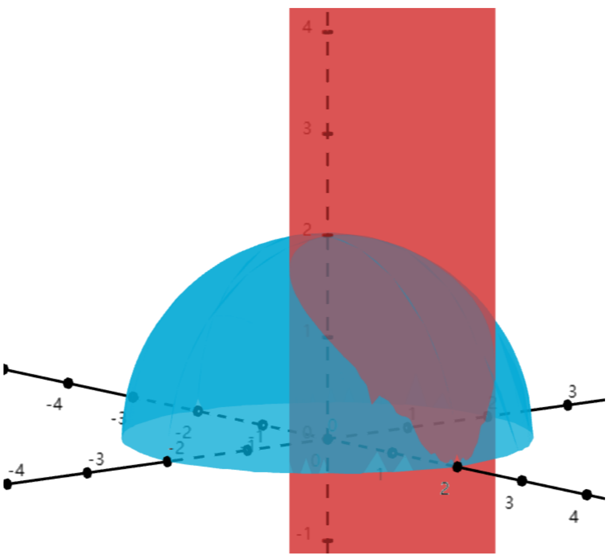
C. 该幂级数在区间$[-1, 1)$上一致收敛

D. 对任意$0<\delta<1$，该幂级数在任何区间$[-1+\delta, 1)$上一致收敛，但在区间$(-1, -1+\delta]$上不是一致收敛的

三、解答题（每题11分）

1. 设D为由不等式组$x>0, 1 \le xy \le 3, x \le 2y \le 2x$确定的平面区域。求$\iint\limits_D x^2dxdy$。

2. 记Σ_1为圆柱面$x^2+y^2=2x$被上半球面$x^2+y^2+z^2=4\ (z \ge 0)$和平面$z=0$所截得的部分，记Σ_2为上半球面$x^2+y^2+z^2=4\ (z \ge 0)$位于区域$x^2+y^2 \le 2x$内部的部分。求Σ_1, Σ_2的面积。



3. 设 S^+ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a,b,c>0$，正向朝外。计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{S^+} xy^2dy\wedge dz+yz^2dz\wedge dx+zx^2dx\wedge dy$。

4. (1) 求微分方程$\begin{cases}(1-x^2)S^n=xS' \\ S(0)=0, S'(0)=1\end{cases}$的幂级数解$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，并求这个幂级数的收敛半径;

(2) 求数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(\frac{1}{2})^n$的值。

5. 已知2π周期函数f在区间$(-\pi,\pi]$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le\pi; \\ -1, & -\pi<x<0.\end{cases}$

(1) 求f的傅里叶级数;

(2) 利用Parseval等式和 (1) 中的级数，证明$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$;

(3) 求积分$\int_0^1\frac{ln(1+x)-ln(1-x)}{x}dx$的值。