清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A（2）　　A 卷　　2022 年 6 月 14 日 9:00-11:00

系名____________ 班级______________ 姓名_______________ 学号_______________

一、填空题（每题 3 分，共 45 分）

1. 函数 $f(x)=x^2$ 在区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2\le 5^2\right\}$ 中的积分平均值

$$\frac{\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

2. 曲线 $L:|x|+|y|=\sqrt{2}$ 的线密度为 $\mu(x,y)=3+x^2-y^2$，则曲线 L 的质量为

____________.

3. 积分 $\int_0^{\pi}\mathrm{d}y\int_y^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$

4. 设 $\lambda>0$，设 L_λ^+ 为单位圆周 $x^2+y^2=\lambda^2$，逆时针为正向，则

$$\frac{1}{\pi\lambda^2}\left(\oint_{L_\lambda^+}(\sin x+y+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x+(3x+x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y\right)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

5. 如图，L^+ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的一条 C^1 曲线，以 $S(0,0,-1)$ 为起点，以 $N(0,0,1)$ 为终点．则

$\int_{L^+}(y^2+z^2)\mathrm{d}x+2(z^2+x^2)\mathrm{d}y+3(x^2+y^2)\mathrm{d}z=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$

6. 三重积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\sqrt{|x|+y^2-\cos z+1}\,\sin(xy^2z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$

7. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-4$ 处条件收敛，记 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^n$ 的收敛半径为 R，则 R 的最小值是____________.

8. 设幂级数 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数是微分方程的初值问题 $\begin{cases}xy''=y\\y(0)=0\\y'(0)=1\end{cases}$ 的解，则

$\frac{1}{a_3}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$

9. 设 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$， $x^2+y^2\neq 0$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}f)(1,1)=$_____________.

10. 设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面

$$\Sigma:\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\ (0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi)\\ z=\theta,\end{cases}$$

取 Σ 朝上一侧为正向，则

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\Sigma^+}2y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-2x\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

11. 设有向曲线 $L^+: x=t, y=t^2, z=t^4, 0\le t\le 1$，参数 t 增加方向与曲线正向一致，则

$$\int_{L^+}9y\mathrm{d}x-3x\mathrm{d}y+4z\mathrm{d}z=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

12. 设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面

$$\Sigma: x^2+y^2-2z=0\ (0\le z\le 8)$$

则

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{\pi\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathrm{d}S=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

13. 已知曲线积分 $\int_{L^+}(2x^2+axy)\mathrm{d}x+(x^2+3y^2)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关（只与曲线的起点和终点有关），则实数 $a=$_____________.

14. 设 $L: x=2t, y=t, z=2-2t, 0\le t\le 1$，则 $\int_L(xy+2y+z)\mathrm{d}l=$_____________.

15. 设 $\vec{F}(x,y,z)=(yz,zx,x^2)$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{F}(x,y,z))=$_____________.

二、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上_____________.

A. 绝对收敛，且一致收敛　　B. 绝对收敛，但不一致收敛

C. 条件收敛，且一致收敛　　D. 条件收敛，但不一致收敛

2. 已知 2π 周期函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi]$ 上满足

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=0,\pi\\ -1, & -\pi<x<0.\end{cases}$$

利用 $f(x)$ 的 Fourier 级数，可得级数

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots$$

的和为____________.

A. $\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}$　　B. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$　　C. $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$　　D. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

3. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^n}$ 的收敛域为____________.

A. $\{0\}$　　B. $(-\infty,+\infty)$　　C. $(-1,1)$　　D. $(-1,1]$

4. 设 a 为常数，则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(na)}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right)$____________.

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛

C. 发散　　D. 收敛性与 a 的取值有关

5. 设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$，记

$$I_1=\iint_D\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}+100(x+y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_2=\iint_D\left(\cos\left(x^2+y^2\right)+10(x+y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_3=\iint_D\left(\cos\left(x^2+y^2\right)^2+x+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

以下结论正确的是____________.

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_2<I_1<I_3$　　C. $I_3<I_2<I_1$　　D. $I_3<I_1<I_2$

6. 空间曲线 L^+ 为柱面 $|x|+|y|=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，它围绕 z 轴的正方向逆时针旋转，则

$$\oint_{L^+}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

A. 6　　　B. $4\sqrt{3}$　　　C. 12　　　D. $12\sqrt{3}$

7. 积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________.

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　　B. π　　　C. $\dfrac{3\pi}{2}$　　　D. 2π

8. 记 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n-1)}$ 的和函数为 $S(x)$，则 $S'\left(\dfrac{1}{2}\right)=$____________.

A. $\ln 2-\ln 3$　　　B. $\ln 3-\ln 2$　　　C. $-\ln 2$　　　D. $\ln 2$

9. 积分 $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x=$____________.

A. 2π　　　B. 4π　　　C. 6π　　　D. 8π

10. 设 Ω 为单位球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$，则流速场

$$\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)=(x+yz,y+zx,z+xy)$$

在单位时间内流出 Ω 的流量 $\iint\limits_{\partial\Omega^+}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=$____________.

A. π　　　B. 2π　　　C. 4π　　　D. 0

三、解答题（共 25 分）

1. （10 分）设 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0,y\ge 0,0\le x+y\le 2\}$，计算二重积分

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. （10 分）计算曲面积分：

$$I=\iint\limits_{S^+}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

其中 S^+ 为曲面 $1-\dfrac{z}{7}=\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}\ (z\ge 0)$ 的上侧.

3. （5 分）已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，数列 $\{b_n\}_{n\ge 1}$ 由以下等式确定：

$$b_n=\ln(\mathrm{e}^{a_n}-a_n),\quad \forall n\ge 1.$$

证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$ 收敛.