题目

系名____________ 班级______________ 姓名_______________ 学号_________________

一．填空题（每空 3 分，共 10 题）（请将答案直接填写在横线上！）

1. 设 f 连续，交换累成积分的次序 $\int_1^2 dx\int_0^x f(x,y)dy =$________________________________。

2. 马鞍面 $z = xy$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 所截，截得的有界部分曲面的面积为________________。

3. 设曲面 $S^+ : z = 1\ (x^2 + y^2 \le 1)$，方向向下，则 $\iint\limits_{S^+} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy =$__________。

4. 设 $L : x^2 + y^2 = 1$，则 $\int_L (x+y)^2 dl =$_________________。

5. 设 L^+ 为从 $(0,0)$ 点到 $(1,2)$ 点的有向线段，则 $\int_{L^+} xy^2 dx + x^2 y dy =$___________。

6. 设 $f(x,y) = x^2 y^2$，则在点 $(1,1)$ 处，$\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) =$_________________。

7. 设 $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (yz, zx, xy)$，则 $\mathrm{rot}\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) =$_________________。

8. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$ 的收敛性为_________________。（填"绝对收敛"，"条件收敛"或"发散"）

9. 设 2π 周期函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x \in [0, \pi) \end{cases}$ 的形式 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(0) =$_____。

10. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，$f(x) = x$，$x \in [0,1]$。若 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，则 $b_n =$____________。

二．解答题（共 6 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

11. 已知曲线积分 $\int_{L(A)}^{(B)} (e^x \sin y - x - y)dx + (e^x \cos y - ax)dy$ 与路径无关。

（I）求 a 的值；

（II）求 $\int_{(0,0)}^{(2,\pi)} (e^x \sin y - x - y)dx + (e^x \cos y - ax)dy$。

12. 设 Ω 为由 $z = 1 - (x^2 + y^2)$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 围成的空间有界区域，求 $\iiint\limits_{\Omega} z dx dy dz$。

13. 求幂级数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} x^{2n-1}$ 的收敛半径及和函数。

14. 设 S^+ 为包含两点 $(-1,0,0),(1,0,0)$ 在其内的逐片光滑的正则闭曲面，方向向外，记 $\vec{\mathbf{r}}_1=(-1,0,0)$，$\vec{\mathbf{r}}_2=(1,0,0)$，$\vec{\mathbf{r}}=(x,y,z)$，函数 $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=a\dfrac{\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_1}{\left\|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_1\right\|^3}+b\dfrac{\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_2}{\left\|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_2\right\|^3}$，其中 a,b 为常数。求 $\iint\limits_{S^+}\vec{\mathbf{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}$。

15. 计算 $\iint\limits_{D}\cos\dfrac{x}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x+y\le 3,\ 0\le\dfrac{x}{x+y}\le 1\right\}$。

16. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$， $0<T\le+\infty$。

（I）若 $u,v\in C^{(2)}(\Omega)$，记 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$， $\nabla u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$，$\vec{\mathbf{n}}$ 为 Ω 边界 $\partial\Omega$ 的外法向量，证明：$\iiint\limits_{\Omega}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial\Omega}v\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\mathbf{n}}}\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

（II）设 $f(x,y,z,t)\in C^{(1)}(\Omega\times[0,T))$，证明：$\forall t\in[0,T)$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\text{；}$$

（III）设 $w(x,y,z,t)\in C^{(2)}(\Omega\times[0,T))$，满足：

（1）$\dfrac{\partial w}{\partial t}=\Delta w+w^3$；　　（2）当 $(x,y,z)\in\partial\Omega$ 时，$\dfrac{\partial w}{\partial t}(x,y,z,t)\equiv 0$， $\forall t\in[0,T)$；

记 $\|\nabla w\|=\sqrt{\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2}$，证明：

$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{1}{2}\|\nabla w\|^2-\dfrac{1}{4}w^4\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 在 $[0,T)$ 上为单调递减函数。

三. 附加题

称向量场 $\vec{\mathbf{F}}:D=\mathrm{R}^2\setminus\{O\}\to\mathrm{R}^2$ 是以 O 为中心的有心力场，若 $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})\,//\,\vec{\mathbf{r}}$ （$\forall\vec{\mathbf{r}}\in D$）。

（I） 证明 $C^{(1)}$ 类有心力场 $\vec{\mathbf{F}}$ 是保守场当且仅当 $\left\|\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})\right\|$ 只与 $r=\left\|\vec{\mathbf{r}}\right\|$ 有关；

（II）（I）中结论对3维空间中的 $C^{(1)}$ 类有心力场是否依然成立？